

Řešení úloh 2. kola 39. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie C

Autorka úloh: R. Horáková

- 1.a) Oddělením části D zůstanou tři části, každá o hmotnosti $m/4$, hmotnost zbylého tělesa je $3m/4$. Souřadnice těžišť jednotlivých částí jsou:

$$A: x_A = a/4, \quad y_A = a/4,$$

$$B: x_B = 3a/4, \quad y_B = a/4,$$

$$C: x_C = a/4, \quad y_C = 3a/4.$$

3 body

Souřadnice těžiště tělesa určíme ze vztahů:

$$x_{T_1} = \frac{\frac{m}{4}(x_A + x_B + x_C)}{\frac{3m}{4}}, \quad y_{T_1} = \frac{\frac{m}{4}(y_A + y_B + y_C)}{\frac{3m}{4}}.$$

Po dosazení vychází $x_{T_1} = y_{T_1} = \frac{5a}{12} = 16,7 \text{ cm}$.

2 body

- b) Počítáme obdobně, souřadnice těžišť jednotlivých částí jsou stejné, hmotnost části A je $m/2$, hmotnost celého tělesa je m .

$$x_{T_2} = \frac{\frac{m}{2}x_A + \frac{m}{4}(x_B + x_C)}{m}, \quad y_{T_2} = \frac{\frac{m}{2}y_A + \frac{m}{4}(y_B + y_C)}{m}.$$

Po dosazení vychází $x_{T_2} = y_{T_2} = \frac{3a}{8} = 15,0 \text{ cm}$.

2 body

- c) Obdobný výpočet, nyní je hmotnost části B rovna $m/2$.

$$x_{T_3} = \frac{\frac{m}{2}x_B + \frac{m}{4}(x_A + x_C)}{m}, \quad y_{T_3} = \frac{\frac{m}{2}y_B + \frac{m}{4}(y_A + y_C)}{m}.$$

Po dosazení vychází $x_{T_3} = \frac{a}{2}$, $y_{T_3} = \frac{3a}{8} = 15,0 \text{ cm}$.

3 body

Úlohu lze řešit i skládáním sil.

- 2.a) Celková energie kmitavého pohybu je $E = \frac{ky_m^2}{2}$. V okamžiku, kdy je potenciální energie kmitání rovna energii kinetické, jsou obě rovny polovině energie celkové. Platí tedy

$$E_p = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{E}{2} = \frac{1}{4}ky_m^2, \quad y^2 = \frac{y_m^2}{2},$$

$$y = \frac{y_m}{\sqrt{2}} = 4,2 \text{ cm}.$$

3 body

- b) Jestliže $y = \frac{y_m}{2}$, platí: $E_p = \frac{ky^2}{2} = \frac{ky_m^2}{8}$.

Kinetickou energii určíme ze vztahu: $E_k = E - E_p = \frac{3ky_m^2}{8}$.

Hledaný poměr $E_k : E_p = 3$.

3 body

- c) Doba kmitu první kuličky je $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$,

druhé kuličky $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4m_1}{k}}$.

Hledaný poměr je: $T_1 : T_2 = 1 : 2$.

2 body

- d) Poněvadž celková energie kmitání je určena tuhostí pružiny a amplitudou výchylky, což je stejné pro obě kuličky, je poměr celkových energií

$$E_1 : E_2 = 1 : 1.$$

2 body

3.a) Plyn spotřebuje při izotermickém stlačení práci

$$W_1 = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = p_1 V_1 \ln 4 \doteq 1,386 p_1 V_1$$

2 body

a při adiabatické expanzi vykoná práci

$$W_2' = -\Delta U = \frac{5}{2} n R_m (T_3 - T_4) = \frac{5}{2} (p_3 V_2 - p_4 V_1).$$

Pro jednotlivé děje dále platí

$$p_2 = 4p_1, \quad p_3 = 2p_2 = 8p_1, \quad p_4 = p_3 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa = 2^{3-2\kappa} p_1.$$

Po dosazení

$$W_2' = \frac{5}{2} p_1 V_1 (2 - 2^{3-2\kappa}) = 5 p_1 V_1 (1 - 2^{2-2\kappa}) \doteq 1,789 p_1 V_1.$$

4 body

b) Plyn přijímá teplo pouze při izochorickém zahřátí. Platí

$$Q = n C_v (T_3 - T_2) = \frac{5}{2} n R_m (T_3 - T_1) = \frac{5}{2} (p_3 V_2 - p_2 V_2) = \frac{5}{2} p_1 V_1.$$

2 body

c) Kruhový děj má účinnost

$$\eta = \frac{W_2' - W_1}{Q} = 2 - 2^{3-2\kappa} - \frac{2}{5} \ln 4 = 30,0\%.$$

2 body

- 4.a) Tlaky p' , p'' těsně pod zakřivenými hladinami v kapilárách určíme jako rozdíl atmosférického tlaku a příslušných kapilárních tlaků. Pozdíl těchto tlaků je vyrovnán hydrostatickým tlakem sloupce vody o výšce Δh :

$$p'' - p' = \left(p_{\text{at}} - \frac{4\sigma}{D} \right) - \left(p_{\text{at}} - \frac{4\sigma}{d} \right) = 4\sigma \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right) = \rho g \Delta h,$$

$$\sigma = \frac{\rho g \Delta h}{4 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right)}.$$

Pro teploty t_1 , t_2 dostaneme:

$$\sigma_1 = 7,30 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, \quad \sigma_2 = 6,23 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

4 body

- b) Úpravou vztahu $\sigma_2 = \sigma_1 [1 + \alpha(t_2 - t_1)]$ dostaneme:

$$\alpha = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1(t_2 - t_1)} = \frac{-1,09 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}{7,30 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 80 \text{ K}} = -2,48 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}.$$

4 body

- c) Dosazením hodnot určených v první a druhé části úlohy a teploty t_3 dostaneme:

$$\sigma_3 = \sigma_1 [1 + \alpha(t_3 - t_1)] = 6,85 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Úlohu c) můžeme řešit také lineární interpolací:

$$\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}, \quad \sigma_3 = \sigma_1 + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)(t_3 - t_1)}{t_2 - t_1}.$$

2 body