Řešení úloh regionálního kola 40. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie B

Autoři úloh: V. Vícha (1, 3), M. Randa (4) a P. Šedivý (2)

1. a) Řešením soustavy rovnic

$$V_{\max} - V_{\min} = V_{\mathrm{zdv}}\,, \qquad \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \varepsilon$$

dostaneme:

$$V_{\min} = V_B = V_C = \frac{V_{\mathrm{zdv}}}{\varepsilon - 1} = 37\ \mathrm{cm}^3 = 3{,}7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3\,,$$

$$V_{\max} = V_A = V_D = \frac{\varepsilon V_{\mathrm{zdv}}}{\varepsilon - 1} = 359\ \mathrm{cm}^3 = 3{,}59 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3\,.$$

1 bod

b) Vyjdeme ze stavové rovnice:

$$\frac{pV}{T} = nR_{\mathrm{m}}\,, \qquad n = \frac{p_A V_A}{R_{\mathrm{m}} T_A} = 0{,}0144\ \mathrm{mol}\,.$$

1 bod

c) Ze stavové rovnice a Poissonova zákona odvodíme:

$$p_B = p_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\varkappa} = p_A \cdot \varepsilon^{\varkappa} = 2{,}41\ \mathrm{MPa}\,,$$

$$T_B = \frac{p_B V_B T_A}{p_A V_A} = T_A \cdot \varepsilon^{\varkappa - 1} = 744\ \mathrm{K} \qquad T_C = 3T_B = 2230\ \mathrm{K}\,.$$

$$\frac{p_B}{p_A} = \frac{p_C}{p_D} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_D}{p_A} = \frac{p_C}{p_B} = \frac{T_C}{T_B} = \frac{T_D}{T_A}\,, \qquad p_C = p_B \frac{T_C}{T_B} = 7{,}22\ \mathrm{MPa}\,,$$

$$p_D = p_A \frac{T_C}{T_B} = 300\ \mathrm{kPa}\,, \qquad T_D = T_A \frac{T_C}{T_B} = 900\ \mathrm{K}\,.$$

2 body

p-V diagram je na obr. R1.

d) Děje AB a CD jsou adiabatické:

$$Q_{AB} = 0\,, \qquad W_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{5}{2} n R_{\mathrm{m}} \left(T_B - T_A\right) = 133\ \mathrm{J}\,,$$

$$Q_{CD} = 0\,, \qquad W'_{CD} = -\Delta U_{CD} = \frac{5}{2} n R_{\mathrm{m}} \left(T_C - T_D\right) = 399\ \mathrm{J}\,.$$

Děje BC a DA jsou izochorické:

$$W_{BC} = 0 \qquad \Delta U_{BC} = Q_{BC} = \frac{5}{2} n R_\mathrm{m} \left(T_C - T_B\right) = 445\ \mathrm{J}\,,$$

$$W_{DA} = 0 \qquad \Delta Q'_{DA} = -\Delta U_{DA} = \frac{5}{2} n R_\mathrm{m} \left(T_D - T_A\right) = 180\ \mathrm{J}\,.$$

2 body

e) Během jednoho cyklu se vykoná celková práce

$$W = W'_{CD} - W_{AB} = Q_{BC} - Q'_{DA} = 266\ \mathrm{J}\,.$$

Účinnost cyklu je

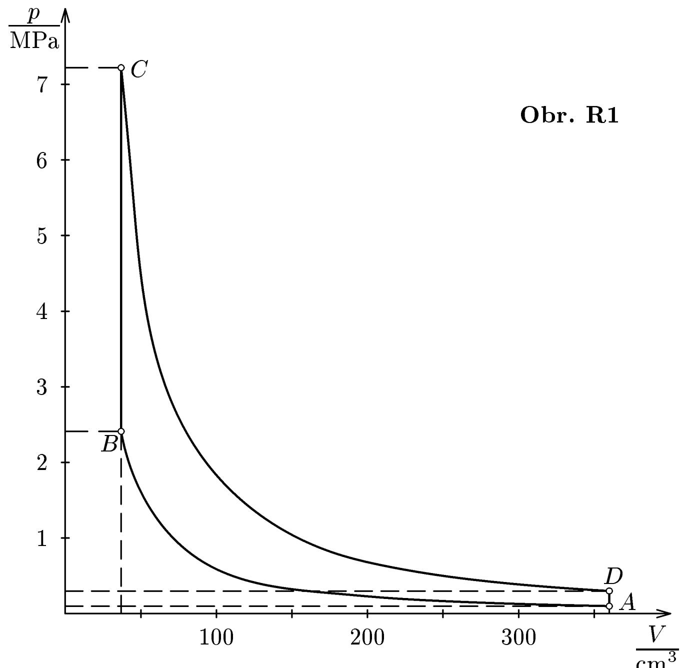
$$\eta = \frac{W}{Q_{BC}} = \frac{Q_{BC} - Q'_{DA}}{Q_{BC}} = 60\ \%\,.$$

1 bod

f) Kruhový děj ve válci proběhne během dvou otáček klikového hřídele. Protože motor je čtyřválcový, platí:

$$P = 4 \cdot 0{,}5 f \cdot W = 2 \cdot 50\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 266\ \mathrm{J} = 26{,}6\ \mathrm{kW}\,.$$

1 bod



Obr. R1

2 body

2.a) Obvod na obr. 1 je zapojen jako invertující zesilovač. Podle 1. Kirchhoffova zákona platí pro uzel u invertujícího vstupu OZ (vstupní proud OZ zanedbáváme):

$$\frac{U_\mathrm{r}}{R_1} = -\frac{u_\mathrm{o}}{R_x}\,, \qquad u_\mathrm{o} = -\frac{R_x}{R_1}U_\mathrm{r}\,.$$

Úpravou dostaneme:

$$R_x = -\frac{R_1 u_\mathrm{o}}{Ur} = K u_\mathrm{o}\,, \qquad K = -\frac{R_1}{U_\mathrm{r}} = -1\ \mathrm{k\Omega \cdot V^{-1}}\,.$$

3 body

Číselná hodnota měřeného odporu v kiloohmech je tedy rovna číselné hodnotě výstupního napětí operačního zesilovače ve voltech. Aby voltmetr ukazoval kladnou hodnotu, musíme jeho kladnou svorku uzemnit a zápornou připojit na výstup operačního zesilovače. Měřicí rozsah v kiloohmech je číselně roven měřicímu rozsahu voltmetru ve voltech. Můžeme tedy měřit odpory do 10 kiloohmů. **1 bod**

b) Abychom zvětšili měřicí rozsah na 1 MΩ, tedy stokrát, musíme zvětšit stokrát konstantu úměrnosti K. Toho dosáhneme zvětšením odporu R_1 na 1 MΩ. **1 bod**

c) Obvod na obr. 2 pracuje podobně jako diferenciální zesilovač. Vstupní diferenciální napětí OZ je prakticky nulové a na obou vstupech OZ je proti zemi stejné napětí u^*. Vstupní proudy OZ jsou zanedbatelné. Vyjdeme z obr. R2. Podle 1. Kirchhoffova zákona platí pro uzel u neinvertujícího vstupu OZ:

$$i_1 = i_2\,, \qquad \frac{u_\mathrm{o} - u^*}{R_2} = \frac{u^*}{R_1}\,, \qquad u^* = \frac{u_\mathrm{o} R_1}{R_1 + R_2}\,.$$

Pro uzel u invertujícího vstupu platí:

$$i_3 + i_4 = i_5 \qquad \frac{U_\mathrm{r} - u^*}{R_1} + \frac{u_\mathrm{o} - u^*}{R_2} = \frac{u^*}{R_x}\,,$$

2 body

$$\frac{U_\mathrm{r}}{R_1} + \frac{u_\mathrm{o}}{R_2} - \frac{u^*(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = \frac{u^*}{R_x} \qquad \frac{U_\mathrm{r}}{R_1} + \frac{u_\mathrm{o}}{R_2} - \frac{u_\mathrm{o})}{R_2} = \frac{u_\mathrm{o} R_1}{(R_1 + R_2) R_x}\,,$$

$$R_x = \frac{u_\mathrm{o} R_1^2}{U_\mathrm{r}(R_1 + R_2)} = K_1 u_\mathrm{o}\,, \qquad K_1 = \frac{R_1^2}{U_\mathrm{r}(R_1 + R_2)} = 10\ \Omega \cdot \mathrm{V^{-1}}\,.$$

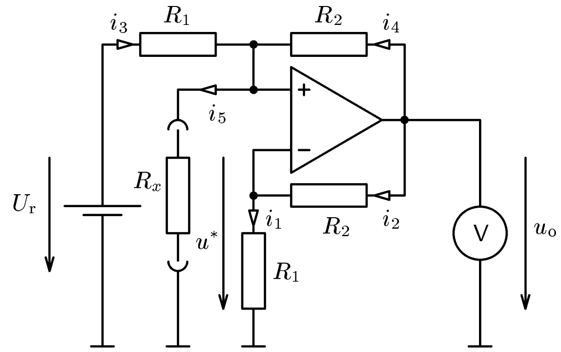
2 body

Protože měřicí rozsah voltmetru je 10 V, je měřicí rozsah obvodu

$$10\ \mathrm{V} \cdot 10\ \Omega \cdot \mathrm{V^{-1}} = 100\ \Omega\,.$$

1 bod

Obr. R2

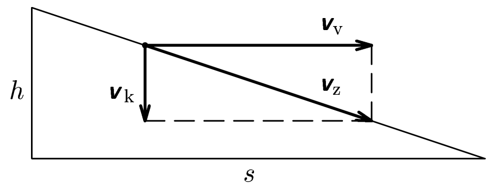


3.a) Během rozjíždění urazí vozík dráhu s a osy kol otočí o úhel

$$\varphi = \frac{h}{r_2} = \frac{s}{r_1}\,. \quad \text{Z toho} \quad s = h\frac{r_1}{r_2}\,.$$

Pohyb bodu Z vznikne složením rovnoměrně zrychleného pohybu vozíku a rovnoměrně zrychleného klesání závaží kolmo k vozíku. Probíhá po přeponě pravoúhlého trojúhelníku se svislou odvěsnou délky h a vodorovnou odvěsnou délky s (obr. R3). Rychlost $\boldsymbol{v}_\mathrm{z}$ bodu Z je vektorovým součtem rychlosti vozíku $\boldsymbol{v}_\mathrm{v}$ a rychlosti klesání $\boldsymbol{v}_\mathrm{k}$. Z podobnosti trojúhelníků dostaneme:

Obr. R3



$$\frac{v_\mathrm{k}}{v_\mathrm{v}} = \frac{h}{s} = \frac{r_2}{r_1}\,,$$

$$v_\mathrm{z} = \sqrt{v_\mathrm{v}^2 + v_\mathrm{k}^2} = v_\mathrm{v}\sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}\,.$$

2 body

b) Vyjdeme ze zákona zachování energie. Těsně před dosednutím závaží na vozík má rychlost vozíku velikost v, rychlost závaží má velikost $v\sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}$ a kola se otáčejí úhlovou rychlostí $\omega = \dfrac{v}{r_1}$. Platí

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + \frac{1}{2}(4m_1 + 2m_2 + m_3)v^2 + \frac{1}{2}(4J_1 + 2J_2)\omega^2 =$$

$$= \frac{v^2}{2}\left[m\left(1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + 6m_1 + m_2\left(2 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + m_3\right]\,,$$

$$v^2 = \frac{2mgh}{\left[m\left(1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + 6m_1 + m_2\left(2 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + m_3\right]}\,,$$

$$s = h\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2}{2a}\,, \qquad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2hr_1}{ar_2}}\,, \qquad v = at\,,$$

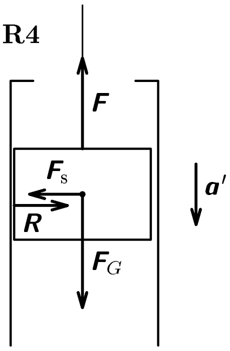
$$a = \frac{v^2 r_2}{2r_1 h} = \frac{mgr_2}{r_1\left[m\left(1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + 6m_1 + m_2\left(2 + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + m_3\right]}\,.$$

Numericky: $a = 0{,}785\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $t = 1{,}38\ \mathrm{s}$ $v = 1{,}085\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

5 bodů

c) Z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě spojené s vozíkem působí na závaží 4 síly (obr. R4): tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, síla vlákna $\boldsymbol{F}$, setrvačná síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$ a reakce trubky $\boldsymbol{R}$. Pokud je tření závaží o stěnu trubky zanedbatelné, setrvačná síla a reakce trubky se vzájemně ruší a zbývající dvě síly udělují závaží ve svislém směru zrychlení a'. Platí

Obr. R4



$$\frac{a'}{a} = \frac{v_\mathrm{k}}{v_\mathrm{v}} = \frac{r_2}{r_1}\,,$$

$$F_G - F = ma'\,,$$

$$F = mg - ma' = m\left(g - a\frac{r_2}{r_1}\right)\,.$$

Numericky: $F = 1{,}451$ N.

3 body

4. a) Dolní destička má proti zápornému pólu zdroje napětí $0{,}5U_0$, horní destička má napětí $U_0\dfrac{h}{L}$. Vychylovací napětí je jejich rozdíl

$$U_\mathrm{v} = U_0\left(\frac{h}{L} - 0{,}5\right) = U_0\frac{h - 0{,}5L}{L}\,.$$

2 body

Vychylovací napětí tedy můžeme měnit od $U_{\mathrm{v_{min}}} = -0{,}5U_0$ pro $h = 0$ do $U_{\mathrm{v_{max}}} = 0{,}5U_0$ pro $h = L$.

b) Zvolme vztažnou soustavu s počátkem O v místě vstupu elektronu mezi destičky tak, že osa x splývá s osou trysky a osa y je kolmá k destičkám (obr. R5 – není v měřítku). Elektron získal v trysce rychlost $\boldsymbol{v}_0$ se kterou vlétá mezi destičky. Platí:

$$Ue = \frac{1}{2}mv_0^2\,, \qquad v_0 = \sqrt{\frac{2Ue}{m}}\,,$$

1 bod

kde e je elementární náboj a m je hmotnost elektronu. Mezi destičkami působí na elektron ve směru osy y stálá elektrická síla o velikosti

$$F = Ee = \frac{U_\mathrm{v}e}{d}\,, \quad \text{která mu uděluje zrychlení o velikosti} \quad a = \frac{F}{m} = \frac{U_\mathrm{v}e}{md}\,.$$

1 bod

Je-li vychylovací napětí U_v kladné, směřuje elektrická síla vzhůru, je-li vychylovací napětí U_v záporné, směřuje elektrická síla dolů.

Pohyb elektronu mezi destičkami je složen z rovnoměrného pohybu ve směru osy x a z rovnoměrně zrychleného pohybu ve směru osy y. Platí:

$$x = v_0t\,, \qquad y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{ax^2}{2v_0^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{U_\mathrm{v}e}{md}\cdot\frac{x^2m}{2Ue} = \frac{U_\mathrm{v}x^2}{4dU}\,.$$

Elektronový paprsek se právě dotkne destičky, jestliže

$$\frac{d}{2} = \frac{|U_\mathrm{v}|\cdot l^2}{4dU}\,. \qquad \text{Z toho} \quad U_{\mathrm{v_{max}}} = |U_{\mathrm{v_{min}}}| = \frac{U_0}{2} = \frac{2d^2}{l^2}U\,, \quad U_0 = \frac{4d^2}{l^2}U\,.$$

Pro dané hodnoty: $U_0 = 500$ V

3 body

c) Rychlost elektronu při výstupu z prostoru destiček je odchýlena od osy trysky o úhel α, pro který platí:

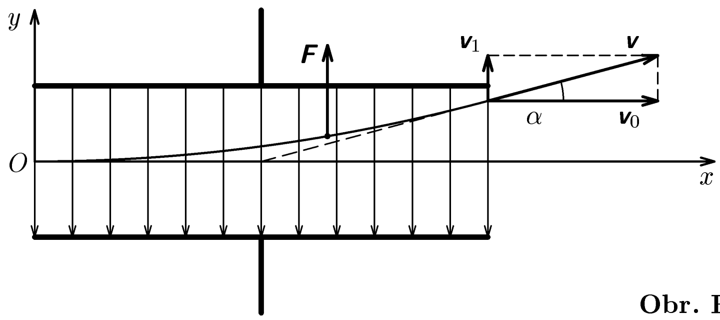
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_1}{v_0} = \frac{at}{v_0} = \frac{U_\mathrm{v}e}{md}\cdot\frac{l}{v_0^2} = \frac{U_\mathrm{v}l}{2Ud}\,.$$

V krajním případě

$$U_{\mathrm{v_{max}}} = \frac{2d^2}{l^2}U\,, \qquad \operatorname{tg}\alpha_\mathrm{max} = \frac{d}{l}\,.$$

Pro dané hodnoty: $\operatorname{tg}\alpha_\mathrm{max} = 0{,}25\,,\quad \alpha_\mathrm{max} = 14°$.

3 body



Obr. R5