

Řešení úloh regionálního kola 41. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie C

Autorka úloh: R. Horáková

1. Označme t_0 dobu, která uplynula od začátku rozjezdu do začátku měření a s_0 dráhu, kterou vlak za tuto dobu projel. Platí:

$$s_0 = \frac{1}{2}at_0^2, \quad s_0 + l = \frac{1}{2}a(t_0 + t_1)^2, \quad s_0 + 2l = \frac{1}{2}a(t_0 + t_1 + t_2)^2.$$

3 body

Odečtením první rovnice od druhé a druhé od třetí a úpravami dostaneme:

$$l = at_0t_1 + \frac{1}{2}at_1^2 = a(t_0 + t_1)t_2 + \frac{1}{2}at_2^2,$$

$$2t_0t_1 + t_1^2 = 2t_0t_2 + 2t_1t_2 + t_2^2, \quad t_0 = \frac{t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)},$$

$$a = \frac{2l}{2t_0t_1 + t_1^2}.$$

3 body

Numericky: $t_0 = 19,3$ s, $a = 0,45$ m · s⁻².

2 body

Do začátku měření vlak projel dráhu

$$s_0 = \frac{1}{2}at_0^2 = 84 \text{ m} = 3 \times 22 \text{ m} + 18 \text{ m}.$$

Soupravu tedy tvoří 5 vagonů a lokomotiva, která je dlouhá 18 m. **2 body**

2.a) Z rovnosti

$$l_1(1 + \alpha_1 \Delta t) = l_2(1 + \alpha_2 \Delta t)$$

odvodíme

$$\Delta t = t - t_1 = \frac{l_2 - l_1}{l_1 \alpha_1 - l_2 \alpha_2}.$$

Pro dané hodnoty dostáváme $\Delta t = -519 \text{ K}$, což je nereálné, neboť bychom se dostali pod absolutní nulu. Tyče tedy nebudou mít stejnou délku při žádné teplotě.

3 body

b) Tyč délky l by se zvýšením teploty o Δt prodloužila o $\Delta l = \alpha \Delta t$. Její relativní prodloužení by bylo

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta t.$$

O stejnou délku se tlakem zarážek zkrátí. Podle Hookova zákona

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{ES}$$

Spojením obou vztahů dostaneme: $F = \varepsilon ES = \alpha \Delta t ES$.

Síly, kterými tyče tlačí na zarážky jsou v poměru

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\alpha_1 \Delta t E_1 S}{\alpha_2 \Delta t E_2 S} = \frac{\alpha_1 E_1}{\alpha_2 E_2}.$$

Pro dané hodnoty: $\frac{F_1}{F_2} = 0,87$. Měděná tyč tlačí na zarážky menší silou.

3 body

c) V obou tyčích vznikne stejné normálové napětí σ . Součet délek se při zahřátí nemění. O kolik se zvětší délka jedné tyče, o tolik se délka druhé zmenší. Platí:

$$\Delta l_1 = l \alpha_1 \Delta t - l \frac{\sigma}{E_1} = -\Delta l_2 = -l \alpha_2 \Delta t + l \frac{\sigma}{E_2}.$$

Úpravami dostaneme:

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \Delta t = \sigma \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right), \quad \sigma = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) \Delta t E_1 E_2}{E_1 + E_2},$$

$$\Delta l_1 = l (\alpha_1 \Delta t - \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) \Delta t E_1 E_2}{E_1 (E_1 + E_2)}) = \frac{l \Delta t (\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2)}{E_1 + E_2}.$$

Pro dané hodnoty: $\Delta l_1 = -2,3 \cdot 10^{-5} \text{ m} = -0,023 \text{ mm}$. Měděná tyč se zkrátí a zinková prodlouží o $0,023 \text{ mm}$.

4 body

3.a) Pro práci W_1 platí:

$$W_1 = (2V_0 - V_0)(2p_0 - p_0) = V_0 p_0.$$

Obdobně:

$$W_2 = (3V_0 - V_0)(2p_0 - p_0) = 2V_0 p_0.$$

2 body

b) V prvním případě plyn přijímá teplo při dějích AB , BC , ve druhém případě při dějích AB , BC' . Pro tepla přijatá během jednoho cyklu platí:

$$Q_1 = nC_V(T_B - T_A) + nC_p(T_C - T_B),$$

$$Q_1 = nC_V(T_B - T_A) + nC_p(T'_C - T_B).$$

2 body

Rozdíly teplot vyjádříme ze stavových rovnic:

$$T_B - T_A = \frac{p_0 V_0}{nR_m}, \quad T_C - T_B = \frac{2p_0 V_0}{nR_m}, \quad T'_C - T_B = \frac{4p_0 V_0}{nR_m}.$$

1 bod

Po dosazení za C_V a C_p a za rozdíly teplot dostaneme:

$$Q_1 = 6,5p_0 V_0, \quad Q_2 = 11,5p_0 V_0.$$

2 body

c) Pro účinnosti platí:

$$\eta_1 = \frac{W_1}{Q_1} = \frac{2}{13}, \quad \eta_2 = \frac{W_2}{Q_2} = \frac{4}{23}, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{23}{26} < 1.$$

Větší účinnost má druhý stroj.

3 body

- 4.a) Aby těleso trvale sledovalo harmonický pohyb desky musí na něj deska působit ve vodorovném směru harmonicky se měnící silou. Amplituda této síly

$$F_m = ma_{x_m} = m\omega^2 x_m$$

nesmí překročit statické tření. Z toho plyne:

$$m\omega^2 x_m \leq \mu_0 mg, \quad x_m \leq \frac{\mu_0 g}{\omega^2} = \frac{\mu_0 g}{(4\pi^2 f^2)}.$$

Pro dané hodnoty: $x_m = 0,031 \text{ m} = 31 \text{ mm}$.

5 bodů

- b) Při svislém kmitání desky působí na těleso ve svislém směru harmonicky se měnící výsledná síla \mathbf{F} o amplitudě F_m , která vzniká složením stálé tíhové síly \mathbf{F}_G orientované dolů a časově proměnné reakce desky \mathbf{R} orientované vzhůru. V horní krajní poloze, kde je reakce desky nejmenší, musí platit:

$$R = F_G - F_m \geq 0, \quad F_G = mg \geq F_m = m\omega^2 y_m.$$

Úpravou dostaneme:

$$\omega \leq \sqrt{\frac{g}{y_m}}, \quad f \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{y_m}}.$$

Pro dané hodnoty: $f \leq 2,23 \text{ Hz}$.

5 bodů