Řešení úloh 1. kola 43. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: M. Jarešová (1), M. Randa (2), R. Horáková (3, 5), L'. Mucha (4), P. Šedivý (6) a I. Volf (7)

1. a) Tíhová síla působící na kvádr je v rovnováze s tlakovou silou působící na jeho dolní podstavu. Síly působící na boční stěny kvádru se navzájem ruší.

$$F_G = V\varrho_1 g = SH\varrho_1 g = F_p = Sh\varrho_2 g\,, \qquad h = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}H = 17{,}4\ \mathrm{cm}\,.$$ **2 body**

b) Hydrostatický tlak rtuti se zvětší o hydrostatický tlak vrstvy vody. Tlaková síla působící na dolní podstavu kvádru se zvětší a kvádr se vynořuje ze rtuti. Platí

$$\varrho_1 SHg = \varrho_2 Sh'g + \varrho_3 Sxg\,,$$

$$h' = \frac{\varrho_1 H - \varrho_3 x}{\varrho_2} = 17{,}1\ \mathrm{cm}\,. \qquad (1)$$

2 body

c) V tomto případě musí být $x_1 = H - h''$,

$$\varrho_1 SHg = \varrho_2 Sh''g + \varrho_3 S(H - h'')g\,, \qquad h'' = \frac{\varrho_1 - \varrho_3}{\varrho_2 - \varrho_3}H = 16{,}5\ \mathrm{cm}\,,$$

$$x_1 = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_3}H = 13{,}5\ \mathrm{cm}\,.$$ **2 body**

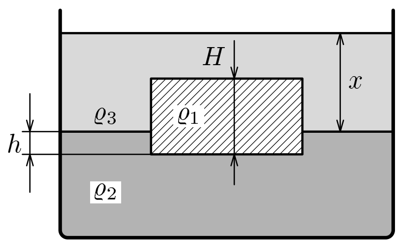
d) Při dalším lití vody se již poloha kvádru vzhledem k rozhraní kapalin nemění. Další růst tlakové síly působící na dolní podstavu je vykompenzován tlakovou silou působící na horní podstavu. Podle obr. R1 platí

$$\varrho_1 SHg = \varrho_2 Shg + \varrho_3 Sxg - \varrho_3 S[x - (H - h)]g = \varrho_2 Shg + \varrho_3 S(H - h)g\,,$$

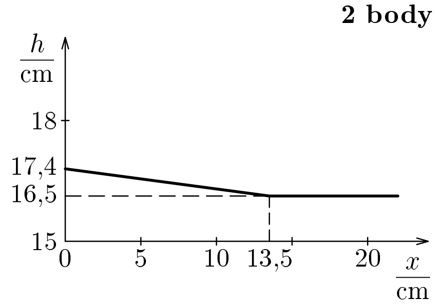
$$h = \frac{\varrho_1 - \varrho_3}{\varrho_2 - \varrho_3}H = konst\,.$$ **2 body**

e) Vztah (1) je rovnice přímky – vyjadřuje závislost h na x od počátku lití vody až do výšky, kdy je celý kvádr potopen. Celý graf je na obr. R2.

2 body



Obr. R1



Obr. R2

2. Soutěžícím doporučujeme prostudování loňského studijního textu *Volf, Šedivý: Pohyb tělesa po eliptické trajektorii v radiálním gravitačním poli.*

a) Planetku Chiron a Zemi porovnáme podle 3. Keplerova zákona:

$$\frac{a_{\mathrm{Ch}}^3}{a_{\mathrm{Z}}^3} = \frac{T_{\mathrm{Ch}}^2}{T_{\mathrm{Z}}^2} \quad \Rightarrow \quad a_{\mathrm{Ch}} = a_{\mathrm{Z}} \sqrt[3]{\frac{T_{\mathrm{Ch}}^2}{T_{\mathrm{Z}}^2}} = 13{,}71\ \mathrm{AU}\,.$$

V dalším výpočtu použijeme numerickou excentricitu ε:

$$r_{\mathrm{p}} = a(1-\varepsilon) \quad \rightarrow \quad \varepsilon = 1 - \frac{r_{\mathrm{p}}}{a} = 0{,}38\,,$$

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = 12{,}69\ \mathrm{AU}\,,$$

$$r_{\mathrm{a}} = a(1+\varepsilon) = 2a - r_{\mathrm{p}} = 18{,}92\ \mathrm{AU}\,.$$

4 body

b) Použijeme vztah $v = \sqrt{\varkappa M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$, kde M je hmotnost Slunce:

$$v_{\mathrm{p}} = \sqrt{\varkappa M \left(\frac{2}{r_{\mathrm{p}}} - \frac{1}{a}\right)} = 12{,}00\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}\,,$$

$$v_{\mathrm{a}} = \sqrt{\varkappa M \left(\frac{2}{r_{\mathrm{a}}} - \frac{1}{a}\right)} = 5{,}40\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

c) Obsah plochy omezené elipsou počítáme podobně jako obsah kruhu:

$$S = \pi ab = 550\ \mathrm{AU}^2 = 1{,}22 \cdot 10^{25}\ \mathrm{m}^2\,.$$

Plošná rychlost planetky je

$$C = \frac{S}{T} = \frac{v_{\mathrm{p}} r_{\mathrm{p}}}{2} = \frac{v_{\mathrm{a}} r_{\mathrm{a}}}{2} = 7{,}6 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

d) 19. 2. 1996 + 50,78 r ... další průlet periheliem nastane na přelomu listopadu a prosince 2046.

1 bod

3. a) Je-li soustava v rovnováze, musí být výsledný moment vzhledem k libovolně zvolené ose otáčení nulový. Osu otáčení zvolíme v místě podpěry. Síla, kterou působí chlapec na lano, je stejně velká jako síla, kterou působí lano na těleso o hmotnosti m_2 . Velikost této síly označíme F. Z podmínky rovnováhy

$$d_3 m_3 g + d_4 m_4 g + F d_2 = d_1 m_1 g + d_2 m_2 g + F d_4$$

odvodíme:

$$F = g\frac{m_3 d_3 + m_4 d_4 - m_1 d_1 - m_2 d_2}{d_4 - d_2} = g\frac{m_3 + 7m_4 - 5m_1 - 3m_2}{4} \approx 370\ \mathrm{N}\,.$$

3 body

b) Minimální hmotnost má chlapec, který za lano netáhne vůbec, tedy $F_{\min} = 0$. Z podmínky rovnováhy určíme hmotnost chlapce:

$$d_3 m_3 g + d_4 m_{4\min} g = d_1 m_1 g + d_2 m_2 g\,,$$

$$m_{4\min} = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2 - m_3 d_3}{d_4} = \frac{5m_1 + 3m_2 - m_3}{7} = 29\ \mathrm{kg}\,.$$

3 body

Maximální síla, kterou může chlapec působit, má velikost $F_{\max} = m_2 g$. Potom těleso o hmotnosti m_2 na fošnu nepůsobí. Vyjádříme opět podmínku pro rovnovážný stav:

$$d_1 m_1 g = d_3 m_3 g + d_4 m_{4\max} g - d_4 m_2 g\,,$$

$$m_{4\max} = \frac{m_1 d_1 - m_3 d_3 + m_2 d_4}{d_4} = \frac{5m_1 - m_3 + 7m_2}{7} = 51\ \mathrm{kg}\,.$$

3 body

Velikost síly, kterou chlapec působí na lano, je ve druhém případě $F_{\max} = m_2 g = 390\ \mathrm{N}$. Velikost síly může tedy být z intervalu $\langle 0\ \mathrm{N}, 390\ \mathrm{N}\rangle$.

1 bod

4. $T_1 = 390\ \mathrm{K},\ T_2 = 300\ \mathrm{K}, P_1 = 60\ \mathrm{kW}$.

a) Pro účinnost platí

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0{,}23 = 23\ \%.$$

3 body

b) Pro účinnost rovněž platí

$$\eta = \frac{P_1 - P_2}{P_1} = 1 - \frac{P_2}{P_1} \quad \Rightarrow \quad P_2 = P_1(1-\eta) = P_1\frac{T_2}{T_1} \approx 46\ \mathrm{kW}.$$

4 body

c) Průměrný pracovní výkon motoru je

$$P = P_1 - P_2 = P_1\eta = P_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \approx 14\ \mathrm{kW}.$$

3 body

5. Těsně před nárazem má kulička rychlost $\boldsymbol{v}_1$. Těsně po odrazu má kulička rychlost $\boldsymbol{v}_2$ v opačném směru a kvádr rychlost $\boldsymbol{v}_3$ ve směru nárazu.

a) Podle zákona zachování mechanické energie získá kulička po uvolnění mezi polohami A a B rychlost

$$v_1 = \sqrt{2gl} = 4{,}43\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,. \tag{1}$$

Také rychlost kuličky po odrazu určíme pomocí zákona zachování mechanické energie:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgl(1-\cos\alpha_1)\,, \qquad v_2 = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha_1)} = 1{,}62\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,. \tag{2}$$

3 body

b) Při srážce je splněn zákon zachování hybnosti

$$mv_1 = -mv_2 + Mv_3\,. \tag{3}$$

Ze vztahů (2) a (3) dostaneme

$$v_3 = \frac{m}{M}(v_1+v_2) = \frac{m}{M}\left(1+\sqrt{1-\cos\alpha_1}\right)\sqrt{2gl}\,.$$

Při brzdění kvádru třením je úbytek kinetické energie roven vykonané práci:

$$\frac{1}{2}Mv_3^2 = F_\mathrm{t}d = fMgd\,,$$

$$d = \frac{v_3^2}{2gf} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{l}{f}\left(1+\sqrt{1-\cos\alpha_1}\right)^2 = 0{,}47\ \mathrm{m}\,.$$

4 body

c) V případě dokonale pružné srážky se zachovává mechanická energie:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}Mv_3^2\,. \tag{4}$$

Ze vztahů (3) a (4) plyne $\quad v_2 = \dfrac{M-m}{M+m}v_1\,.$

Podobně jako v úloze a) odvodíme ze zákona zachování mechanické energie:

$$\cos\alpha_2 = 1 - \frac{v_2^2}{2gl} = 1 - \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 = \frac{4Mm}{(M+m)^2} \doteq 0{,}64\,, \quad \alpha_2 \doteq 50^\circ\,.$$

3 body

7. a) Ze stavové rovnice odvodíme:

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}\,, \qquad \varrho_0 = \frac{Mp_0}{RT_0}\,, \qquad \varrho = \varrho_0 \frac{pT_0}{p_0 T}\,.$$

Za p dosadíme $p_\mathrm{h} + \varrho_\mathrm{v} hg = 5{,}9 \cdot 10^5$ Pa a dostaneme

$$\varrho = 1{,}293 \frac{5{,}9 \cdot 10^5 \cdot 273{,}15}{1{,}01325 \cdot 10^5 \cdot 277{,}15}\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}} = 7{,}4\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}\,.$$

5 bodů

b) Úpravou vztahu

$$\varrho = \varrho_0 \frac{pT_0}{p_0 T} = \varrho_0 \frac{(p_\mathrm{h} + \varrho_\mathrm{v} gh) T_0}{p_0 T}$$

dostaneme

$$h = \frac{\dfrac{\varrho p_0 T}{\varrho_0 T_0} - p_\mathrm{h}}{\varrho_\mathrm{v} g}\,.$$

Pro dané hodnoty

$$h = \frac{\dfrac{5 \cdot 1{,}01325 \cdot 10^5 \cdot 277{,}15}{1{,}293 \cdot 273{,}15} - 9{,}94 \cdot 10^4}{1000 \cdot 9{,}8}\ \mathrm{m} \approx 30\ \mathrm{m}\,.$$

5 bodů