

Řešení úloh regionálního kola 44. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autor úloh: J. Jírů

1. a) Dráha Δs uražená od času $t_1 = 1,00$ s do času $t_2 = 2,00$ s je $\Delta s = \frac{1}{2}a(t_2^2 - t_1^2)$.

Z toho určíme zrychlení $a = \frac{2\Delta s}{t_2^2 - t_1^2} = 2,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, konstantní pro celý pohyb.

Hledaná dráha od času $t_2 = 2,00$ s do času $t_3 = 3,00$ s je pak

$$\Delta s' = \frac{1}{2}a(t_3^2 - t_2^2) = 5,00 \text{ m.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- b) Okamžitá rychlost v čase $t_3 = 3,00$ s je $v_3 = at_3 = 6,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. $\mathbf{1 \text{ bod}}$

- c) Dráha uražená za první 3 sekundy pohybu, tedy v čase $t_3 = 3$ s je

$$s = \frac{1}{2}at_3^2 = 9,00 \text{ m.}$$

Hledaná průměrná rychlost je pak $v_p = \frac{s}{t_3} = 3,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. $\mathbf{1 \text{ bod}}$

- d) Doba nutná k uražení dráhy $s = 2$ m je $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2} \text{ s} \doteq 1,41$ s. Průměrná

rychlost je pak $v_p = \frac{s}{t} = \sqrt{2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 1,41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. $\mathbf{2 \text{ body}}$

- e) Ze základních rovnic rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí plyne pro rychlost vztah $v = \sqrt{2as}$. Pro $s = 3$ m vychází

$$v = 2\sqrt{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 3,46 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- f) Označme t_1, t_2 dolní a horní mez hledaného časového intervalu. Řešením soustavy rovnic

$$\Delta s = \frac{1}{2}a(t_2^2 - t_1^2) = \frac{1}{2}a(t_2 + t_1)(t_2 - t_1) = 2 \text{ m}, \quad t_2 - t_1 = 1 \text{ s},$$

dostaneme

$$t_2 + t_1 = 2t_1 + 1,00 \text{ s} = \frac{2\Delta s}{a(t_2 - t_1)} = 2,00 \text{ s}, \quad t_1 = 0,50 \text{ s}, \quad t_2 = 1,50 \text{ s.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- g) Ze základních rovnic rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí plyne pro dráhu vztah $s = \frac{v^2}{2a}$. Dosazením $v = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dostaneme hledanou dráhu

$$s = 2,25 \text{ m.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Poznámka: Řadu odpovědí lze získat z grafu závislosti rychlosti na čase, který sestrojíme na základě vypočteného zrychlení v úloze a).

2. a) Průměrná rychlost těžiště během zastavování je $v_0/2$. Těžiště během zastavování urazí dráhu $s = \frac{v_0 \Delta t}{2}$. Počet otáček je $N = \frac{s}{2\pi r} = \frac{v_0 \Delta t}{4\pi r} = 5,6$. **2 body**

- b) Velikost tečného zrychlení $a_t = \frac{v_0}{\Delta t} = 0,072 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je během zastavování konstantní. Dostředivé zrychlení má na počátku velikost $a_{d0} = \frac{v_0^2}{r} = 5,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. **2 body**

- c) Během zastavování se velikost rychlosti těžiště zmenšuje. Platí

$$v = v_0 - a_t t = v_0 \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right).$$

Proto se zmenšuje i velikost dostředivého zrychlení. V čase $t = t_1$ platí

$$a_d = \frac{v^2}{r} = \frac{v_0^2 \left(1 - \frac{t_1}{\Delta t}\right)^2}{r} = a_t = \frac{v_0}{\Delta t}.$$

Úpravou dostaneme

$$\left(1 - \frac{t_1}{\Delta t}\right)^2 = \frac{r}{v_0 \Delta t}, \quad t_1 = \Delta t \left(1 - \sqrt{\frac{r}{v_0 \Delta t}}\right) \doteq 38 \text{ s}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

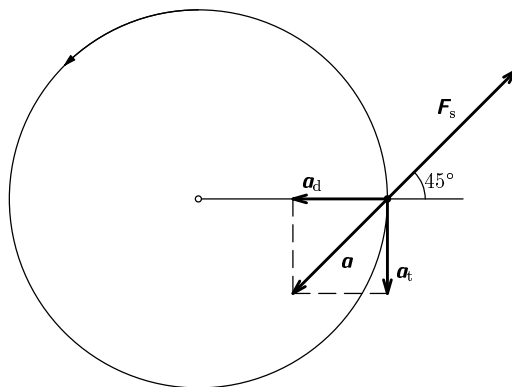
- d) Ve vztahné soustavě spojené s kolotočem působí na děvčátko setrvačná síla

$$\mathbf{F}_s = -m\mathbf{a},$$

kde \mathbf{a} je výslednice tečného a dostředivého zrychlení těžiště. V čase $t = t_1$ je velikost celkového zrychlení $a = a_t \sqrt{2}$ a setrvačná síla má velikost

$$F_s = ma = \frac{mv_0 \sqrt{2}}{\Delta t} = 1,4 \text{ N}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- e)



Obr. R1

1 bod

3. a) Z rovnice $h = \frac{1}{2}gt_1^2$ plyne pro dobu letu

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1)$$

Počáteční rychlost vrhu má velikost

$$v_0 = \frac{d}{t_1}. \quad (2)$$

Velikost svislé složky rychlosti dopadu je $|v_{y1}| = gt_1$. Pro úhel dopadu platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|v_{y1}|}{v_0} = \frac{gt_1^2}{d} = \frac{2h}{d}, \quad \alpha = 47,9^\circ. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- b) Ze zákona zachování energie plyne

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2, \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

S použitím rovnic (1) a (2) dostaneme

$$v_1 = \sqrt{g \frac{d^2 + 4h^2}{2h}} = 30,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Délka šikmého vrhu $d' = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ je největší pro $\alpha = 45^\circ$. V tomto případě užitím rovnic (1) a (2) dostaneme

$$d' = \frac{v_0^2}{g} = \frac{d^2}{t_1^2 g} = \frac{d^2}{2h} = 42,5 \text{ m} \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

4. a) Z rovnosti dostředivé a gravitační síly při pohybu kosmické lodi o hmotnosti m po kružnici plyne

$$m \frac{4\pi^2}{T^2} (R+h) = \varkappa \frac{mM}{(R+h)^2},$$

$$R+h = \sqrt[3]{\frac{\varkappa MT^2}{4\pi^2}}, \quad (1)$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{\varkappa MT^2}{4\pi^2}} - R = 115 \text{ km}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- b) Z rovnosti dostředivé a gravitační síly

$$\frac{mv^2}{R+h} = \varkappa \frac{mM}{(R+h)^2}$$

a z rovnice (1) plyne

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa M}{R+h}} = \frac{\sqrt{\varkappa M}}{\sqrt[3]{\frac{\varkappa MT^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi\varkappa M}{T}} = 1630 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Krátkodobým zapnutím raketového motoru otočeného tryskou proti směru pohybu mírně snížili rychlost měsíčního modulu, který po málo výstředné elipse začal klesat k povrchu Měsíce. $\mathbf{1 \text{ bod}}$
- d) Nejkratší dobu oběhu bude mít kosmická loď, která se bude pohybovat po kružnici těsně při měsíčním povrchu. Z rovnosti dostředivé a gravitační síly plyne

$$m \frac{4\pi^2}{T'^2} R = \varkappa \frac{mM}{R^2}, \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\varkappa M}} = 6488 \text{ s} = 1 \text{ h } 48 \text{ min}.$$

K témuž výsledku se dostaneme užitím 3. Keplerova zákona

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{R^3}{(R+h)^3}$$

a rovnice (1). $\mathbf{3 \text{ body}}$

Poznámky: 1) Skutečná parkovací trajektorie nebyla kruhová, nýbrž eliptická s minimální a maximální výškou nad měsíčním povrchem 99,4 km a 121,3 km.

2) Po krátkodobém přibrzdění se astronauti dostali po elipse do výšky 14,6 km nad povrchem Měsíce, z níž zahájili sestup a po 12 min 37 s úspěšně přistáli.