

Řešení úloh krajského kola 49. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Autoři úloh: M. Jarešová (1, 2), P. Šedivý (4); 3. úloha je z časopisu Kvant.

1.a) Ze zákona zachování hybnosti plyne

$$m_1 v = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

kde u_1, u_2 vyjadřují x -ové souřadnice rychlostí po první srážce. Podle zákona zachování mechanické energie můžeme psát

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2,$$

Po úpravě dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} m_1(v - u_1) &= m_2 u_2, \\ m_1(v^2 - u_1^2) &= m_2 u_2^2. \end{aligned}$$

Po vydělení druhé rovnice první rovnicí dostaneme

$$v + u_1 = u_2,$$

po dosazení do první rovnice pak je

$$m_1(v - u_1) = m_2(v + u_1),$$

$$\text{z čehož } u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{m_1 - k m_1}{m_1 + k m_1} v = \frac{1 - k}{1 + k} v,$$

$$\text{potom } u_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v = \frac{2}{1 + k} v.$$

Pro dané hodnoty:

$$1. k = \frac{1}{2}: u_1 = \frac{1}{3} v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, u_2 = \frac{4}{3} v = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$2. k = 2: u_1 = -\frac{1}{3} v = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, u_2 = \frac{2}{3} v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

b) Vozíky se po odrazu druhého vozíku od koncového dorazu k sobě určitě přibližují, jestliže $u_1 \geq 0$, tj. $k \leq 1$. Pokud je $u_1 < 0$, tj. $k > 1$, musí platit

$$|u_2| > |u_1| \Rightarrow \frac{2}{k+1} > \frac{k-1}{k+1} \Rightarrow k < 3.$$

3 body

c) Platí $l_0 = u_2 t$, z čehož $t = \frac{l_0}{u_2}$ je doba od srážky do nárazu 2. vozíku na doraz.

První vozík za tuto dobu urazí z místa srážky vzdálenost $d = u_1 t = \frac{u_1}{u_2} l_0$.

V okamžiku nárazu druhého vozíku na stěnu je vzdálenost mezi vozíky

$$b = l_0 - d = l_0 - \frac{u_1}{u_2} l_0 = \left(1 - \frac{1-k}{2}\right) l_0 = \frac{1+k}{2} l_0.$$

Určíme dobu t' (měřenou od doby nárazu 2. vozíku na doraz), za kterou dojde k další srážce:

$$t' = \frac{b}{u_2 + u_1} = \frac{\frac{1+k}{2} l_0}{\left(\frac{2}{1+k} + \frac{1-k}{1+k}\right) v} = \frac{(1+k)^2 l_0}{2(3-k) v}.$$

Vzdálenost l od zarážky, kdy dojde ke druhé srážce, je pak dána vztahem

$$l = u_2 t' = \frac{2}{1+k} v \frac{(1+k)^2 l_0}{2(3-k) v} = \frac{1+k}{3-k} l_0.$$

Pro dané hodnoty:

$$1. \text{ Pro } k = \frac{1}{2}: l = \frac{3}{5} l_0 = 18 \text{ cm},$$

$$2. \text{ Pro } k = 2: l = 3 l_0 = 90 \text{ cm}.$$

4 body

Poznámka: Úlohu b) je také možno řešit na základě podmínky, aby hodnoty t', l (stačí jedna z nich) byly kladné a konečné, tj. aby platilo $3 - k > 0$, z čehož dostaneme již dříve uvedenou podmínku $k < 3$.

2.a) Děj 1 – 2 je izochorický, $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$; děj 2 – 3, izobarický $p_2 = p_3$; děj 3 – 4 izochorický, $\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_4}{T_4}$; děj 4 – 1 izobarický, $p_4 = p_1$. **2 body**

b) Ze vztahů a) můžeme psát $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_3}{T_2}$, z čehož $\frac{p_1}{p_3} = \frac{T_1}{T_2}$. Dále také $\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_1}{T_2}$, z čehož $\frac{p_1}{p_3} = \frac{T_2}{T_3}$. Porovnáním vztahů pro $\frac{p_1}{p_3}$ dostaneme $\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2}{T_3}$, z čehož $T_2 = \sqrt{T_1 \cdot T_3}$, dále užijeme vztah $T_3 = 4T_1$ a dostaneme $T_2 = 2T_1 = T_4$. **2 body**

c) Vyjdeme ze stavové rovnice ideálního plynu ve tvaru $pV = nRT$.

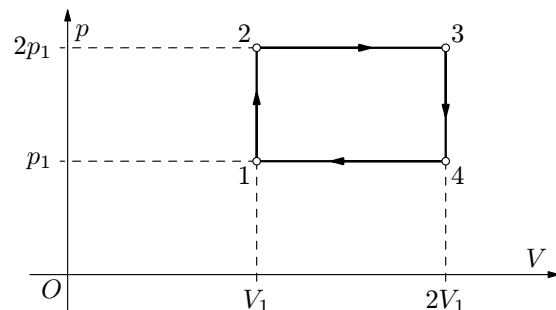
1: $V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 0,023 \text{ m}^3$, $p_1 = 0,1 \text{ MPa}$.

2: $V_2 = V_1$; $p_2 = \frac{T_2}{T_1}p_1 = 2p_1 = 0,2 \text{ MPa}$.

3: $p_3 = p_2 = 2p_1 = 0,2 \text{ MPa}$; $V_3 = \frac{T_3}{T_2}V_2 = 2V_1 = 0,045 \text{ m}^3$.

4: $p_4 = p_1$; $V_4 = \frac{T_4}{T_1}V_1 = 2V_1 = V_3 = 0,045 \text{ m}^3$. **2 body**

d) Graf je znázorněn na obr. R1



Obr. R1

2 body

e) Práce vykonaná plynem při kruhovém ději je dána vztahem

$$W' = (p_2 - p_1) \cdot (V_3 - V_2) = p_1 V_1 = nRT_1 = 2270 \text{ J.}$$

1 bod

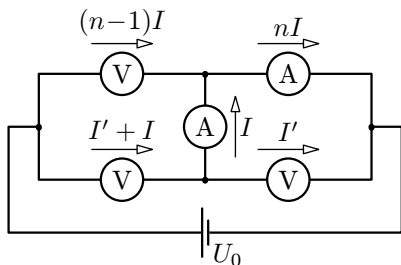
f) Dodané teplo $Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + W'_{23}$

$$Q_1 = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{5}{2}nR(T_3 - T_2) + p_2(V_3 - V_2) = \\ = \frac{5}{2}V_1(2p_1 - p_1) + \frac{5}{2}2p_1(2V_1 - V_1) + 2p_1(2V_1 - V_1) = 9,5p_1 V_1.$$

Účinnost je pak dána vztahem $\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{p_1 V_1}{9,5p_1 V_1} = \frac{1}{9,5} = 10,5 \%$.

1 bod

- 3.a) Vzhledem k polaritě zdroje a vzhledem k tomu, že odpor voltmetru je větší než odpor miliampérmetru, můžeme předpokládat, že proudy ve větvích sítě budou mít směry vyznačené na obr. R2. Proud procházející miliampérmetrem v diagonále můstku označme I . Druhým miliampérmetrem prochází proud větší o proud horního voltmetru. Podle předpokladu úlohy má velikost nI a horním voltmetrem prochází podle 1. Kirchhoffova zákona proud $(n-1)I$. Proudů procházející zbývajícími voltmetry označme v souladu s 1. Kirchhoffovým zákonem I' a $I' + I$.



Obr. R2

Označme R_V , R_A odpory voltmetru a miliampérmetru. Podle 2. Kirchhoffova zákona

$$(I' + I)R_V + IR_A = (n-1)IR_V, \quad (1)$$

$$I'R_V = IR_A + nIR_A. \quad (2)$$

3 body

Dosazením za $I'R_V$ z (2) do (1) a úpravou dostaneme

$$(n+2)IR_A = (n-2)IR_V \Rightarrow \frac{R_V}{R_A} = \frac{n+2}{n-2} = 5.$$

Jednotlivými voltmetry procházejí proudy

$$(n-1)I = \frac{(n-1)(n+2)}{n+2}I = 2I,$$

$$I' = I(n+1)\frac{R_A}{R_V} = \frac{(n+1)(n-2)}{n+2}I = \frac{4}{5}I,$$

$$I' + I = \left(\frac{(n+1)(n-2)}{n+2} + 1 \right) I = \frac{n^2}{n+2}I = \frac{9}{5}I.$$

Napětí na voltmetrech jsou tedy v poměru

$$U_1 : U_2 : U_3 = (n-1)(n+2) : (n+1)(n-2) : n^2 = 10 : 4 : 9.$$

4 body

Řešením soustavy rovnic

$$U_2 + U_3 = U_0, \quad U_2 : U_3 = (n+1)(n-2) : n^2$$

dostaneme

$$U_3 = \frac{n^2}{(n+1)(n-2) + n^2}U_0 = \frac{9}{13}U_0 = 0,9 \text{ V},$$

$$U_2 = \frac{(n+1)(n-2)}{(n+1)(n-2) + n^2}U_0 = \frac{4}{13}U_0 = 0,4 \text{ V}.$$

Zbývající napětí je

$$U_1 = \frac{(n-1)(n+2)}{n^2}U_3 = \frac{(n-1)(n+2)}{(n+1)(n-2) + n^2}U_0 = \frac{10}{13}U_0 = 1 \text{ V}.$$

3 body

- 4.a) Na tyč vychýlenou o malý úhel α z rovnovážné polohy (obr. R3) působí tíhová síla momentem

$$M = -mg \frac{l}{2} \sin \alpha \approx -\frac{mgl}{2} \alpha = -D\alpha$$

naměřeným proti okamžité výchylce. Kyvadlo kývá s periodou

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} = 1,16 \text{ s.}$$



Obr. R3
3 body

- b) V rovnovážné poloze tyče se síly, kterými působí pružiny na její konec, ruší. Vychýlíme-li tyč o malý úhel α , jedna pružina se zkrátí a druhá se prodlouží o $l \sin \alpha$. Síla jedné pružiny se zvětší a druhé pružiny zmenší o $k \cdot l \sin \alpha$. Výsledná síla, kterou pružiny působí na konec tyče, má velikost $F_p = 2kl \sin \alpha$ a je naměřena proti okamžité výchylce (obr. R4). Celkový moment sil působících na tyč je

$$M = -mg \frac{l}{2} \sin \alpha - 2kl \sin \alpha \cdot l \cos \alpha \approx -\left(\frac{mgl}{2} + 2kl^2\right) \alpha = -D'\alpha$$

a kyvadlo kývá s periodou

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D'}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{ml^2}{3}}{\frac{mgl}{2} + 2kl^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{2ml}{3mg + 12kl}}.$$

Podle zadání úlohy je

$$T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{2\pi}{2} \sqrt{\frac{2l}{3g}} = 0,58 \text{ s.}$$

Úpravou dostaneme

$$\frac{2ml}{3mg + 12kl} = \frac{2l}{3g} \cdot \frac{1}{4} \rightarrow k = \frac{3mg}{4l} = 3,7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

4 body

- c) U převrácené soustavy působí moment tíhové síly ve směru výchylky z rovnovážné polohy (obr. R5). Výsledný moment je

$$M = -2kl \sin \alpha \cdot l \cos \alpha + mg \frac{l}{2} \sin \alpha \approx -\left(2kl^2 - \frac{mgl}{2}\right) \alpha = -D''\alpha.$$

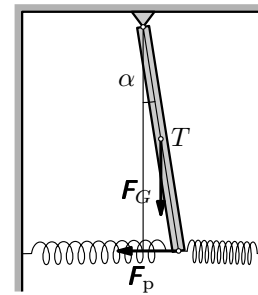
V našem případě

$$D'' = 2 \cdot \frac{3mg}{4l} \cdot l^2 - \frac{mgl}{2} = mgl > 0.$$

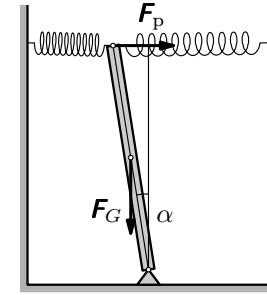
(Pokud by platilo $k \leq \frac{mg}{4l}$, směrný moment by byl nulový či záporný a ke kmitání by nedošlo.) Soustava kmitá s periodou

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D''}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{ml^2}{3}}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g}} = 0,82 \text{ s.}$$

3 body



Obr. R4



Obr. R5