**Řešení úloh krajského kola 51. ročníku fyzikální olympiády**

*Kategorie B*

Autorka úloh: M. Jarešová

**1.** a) Vyjdeme z obr. R1. Ze zákona zachování energie plyne

$$k=\frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh_0}}=\sqrt{\frac{h}{h_0}}=0{,}80.$$

**3 body**

b) Podrobně rozkreslený pohyb míčku je znázorněn na obr. R2. Ze zákona zachování energie plyne

$$v_6^2=2gH,\qquad v_5^2=\frac{v_6^2}{k^2},\qquad v_4^2=v_5^2-2gH=2gH\left(\frac{1}{k^2}-1\right),$$

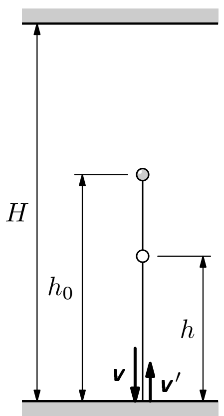
$$v_3^2=\frac{v_4^2}{k^2}=2gH\left(\frac{1}{k^4}-\frac{1}{k^2}\right),\qquad v_2^2=v_3^2+2gH=2gH\left(\frac{1}{k^4}-\frac{1}{k^2}+1\right),$$

$$v_1^2=\frac{v_2^2}{k^2}=2gH\left(\frac{1}{k^6}-\frac{1}{k^4}+\frac{1}{k^2}\right),$$

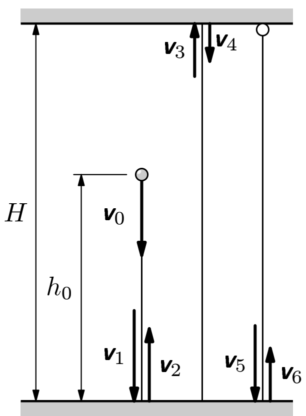
$$v_0^2=v_1^2-2gh_0=2g\left[H\left(\frac{1}{k^6}-\frac{1}{k^4}+\frac{1}{k^2}\right)-h_0\right],$$

$$v_0=\sqrt{2g\left[H\left(\frac{1}{k^6}-\frac{1}{k^4}+\frac{1}{k^2}\right)-h_0\right]}=10{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

**7 bodů**




Obr.R1




Obr. R2

**2.** a) Celkové prodloužení pružin při působení síly o velikosti $F$ je

$$\Delta l=\Delta l_1+\Delta l_2=\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}=\frac{F}{k}.$$

Z toho $$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{k}.$$ **1 bod**

Pro doby kmitů závaží na pružinách platí

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}},\qquad T_2=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}.$$

Pro dobu kmitu pružin zavěšených pod sebou platí

$$T_3=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)}.$$

Pak $$T_3^2=\frac{4\pi^2m}{k}=\frac{4\pi^2m}{k_1}+\frac{4\pi^2m}{k_2}=T_1^2+T_2^2.$$ **2 body**

Dále platí

$$T_1=\frac{3}{4}T_2,\qquad T_3^2=\frac{9}{16}T_2^2+T_2^2=\frac{25}{16}T_2^2,$$

$$T_2=\frac{4}{5}T_3=1{,}20\ \mathrm{s},\qquad T_1=\frac{3}{5}T_3=0{,}90\ \mathrm{s}.$$

$$k_1=\frac{4\pi^2m}{T_1^2}=\frac{100\pi^2m}{9T_3^2}=24{,}4\ \mathrm{N\cdot m^{-1}},\ k_2=\frac{4\pi^2m}{T_2^2}=\frac{25\pi^2m}{4T_3^2}=13{,}7\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}.$$

**2 body**

b) Po zavěšení závaží je první pružina napínána silou o velikosti $F_1=k_1\Delta l$, druhá pružina silou $F_2=k_2\Delta l$, dále pak platí $F_1x=F_2(d-x)$, po dosazení $k_1\Delta lx=k_2\Delta l(d-x)$, z čehož $x=\dfrac{k_2}{k_1+k_2}d=7{,}2$ cm.

**2 body**

Z rovnosti $F_G=mg=k\Delta l=F_1+F_2=(k_1+k_2)\Delta l$

plyne $k=k_1+k_2,\qquad \Delta l=\dfrac{mg}{k_1+k_2}=12{,}9$ cm. **1 bod**

c) Pro dobu kmitu závaží na obr. 2 platí $T_4=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}=0{,}72$ s.

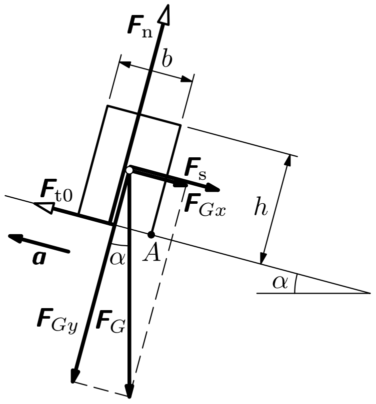
**1 bod**

Ze vztahů pro $T_4$, $T_1$ a $T_2$ plyne

$$\frac{1}{T_4^2}=\frac{k}{4\pi^2m}=\frac{k_1+k_2}{4\pi^2m}=\frac{k_1}{4\pi^2m}+\frac{k_2}{4\pi^2m}=\frac{1}{T_1^2}+\frac{1}{T_2^2}.$$

z čehož $$\frac{1}{T_4^2}=\frac{1}{T_1^2}+\frac{1}{T_2^2}.$$ **1 bod**

**3.** a) Rozjezd: úlohu budeme řešit v soustavě spojené s korbou automobilu. Na těleso stále působí síla tíhová $\boldsymbol{F}_G$ a kolmá tlaková síla $\boldsymbol{F}_n$ od korby. Při rozjezdu působí na náklad třecí síla klidového tření $\boldsymbol{F}_{t0}$ a setrvačná síla $\boldsymbol{F}_s = -m\boldsymbol{a}$ (obr. R3).



Obr. R3

Nejprve stanovíme mezní zrychlení $\boldsymbol{a}_1$, aby nedocházelo k pohybu nákladu smykem. Podle obr. R3 platí

$$F_{Gy} = mg\cos\alpha,$$

$$F_{Gx} = mg\sin\alpha,$$

$$F_{t0} = f_0 F_n.$$

Z podmínky rovnováhy ve směru kolmém na ložnou plochu plyne

$$F_n = mg\cos\alpha.$$

Z podmínky rovnováhy ve směru rovnoběžném s ložnou plochou dostaneme

$$-ma_1 - mg\sin\alpha + mgf_0\cos\alpha = 0,$$

z čehož

$$a_1 = (f_0\cos\alpha - \sin\alpha)g.$$

Dále určíme podmínku, aby nedošlo k převrácení nákladu (došlo by k tomu kolem bodu A). Vzhledem k bodu $A$ platí

$$mg\sin\alpha\cdot\frac{h}{2} - mg\cos\alpha\cdot\frac{b}{2} - (-ma_2)\cdot\frac{h}{2} = 0,$$

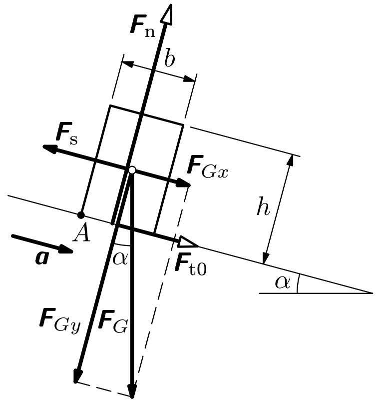
z čehož

$$a_2 = \left(\frac{b}{h}\cos\alpha - \sin\alpha\right)g.$$

Pro dané hodnoty:
1. když $f_0 = 0{,}4$ je $a_1 = 1{,}25\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a_2 = 3{,}78\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, maximální hodnota zrychlení, aby náklad zůstal vůči korbě v klidu, je v tomto případě $a_{max} = 1{,}25\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$;
2. když $f_0 = 0{,}7$ je $a_1 = 4{,}09\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a_2 = 3{,}78\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, maximální hodnota zrychlení, aby náklad zůstal vůči korbě v klidu, je v tomto případě $a_{max} = 3{,}78\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

**5 bodů**

b) Zpomalování: budeme řešit obdobně jako v úloze a), analogickou situaci znázorňuje obr. R4.



Obr. R4

Nejprve stanovíme mezní zrychlení $\boldsymbol{a}'_1$, aby nedocházelo k pohybu nákladu smykem. Obdobně jako v případě a) se zaměříme nejprve na situaci, aby nedocházelo ke smyku. Platí

$$-ma'_1 + mg\sin\alpha + mgf_0\cos\alpha = 0,$$

z čehož

$$a'_1 = (\sin\alpha + f_0\cos\alpha)g.$$

Aby nedošlo k převrácení nákladu musí platit

$$+mg\sin\alpha\cdot\frac{h}{2} + mg\cos\alpha\cdot\frac{b}{2} - ma'_2\cdot\frac{h}{2} = 0,$$

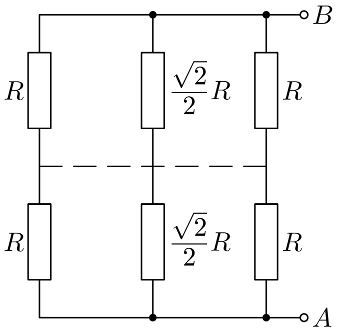
z čehož

$$a'_2 = \left(\frac{b}{h}\cos\alpha + \sin\alpha\right)g.$$

Pro dané hodnoty:
1. když $f_0 = 0{,}4$ je $a'_1 = 6{,}33\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a'_2 = 8{,}86\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, maximální hodnota zrychlení, aby náklad zůstal vůči korbě v klidu, je v tomto případě $a'_{max} = 6{,}33\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$;
2. když $f_0 = 0{,}7$ je $a'_1 = 9{,}17\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a'_2 = 8{,}86\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, maximální hodnota zrychlení, aby náklad zůstal vůči korbě v klidu, je v tomto případě $a'_{max} = 8{,}86\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

**5 bodů**

**4.** a) Připojíme-li zdroj k bodům $A$ a $B$, mají body $E,S$ a $F$ stejný potenciál. Můžeme tedy spoje $ES$ a $SF$ vypustit, protože jimi neprochází žádný proud. Nakreslíme náhradní schéma zapojení (obr. R5).




Obr. R5

Platí

$$\frac{1}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R\sqrt{2}} + \frac{1}{2R},$$

z čehož

$$R_{\mathrm{AB}} = (2-\sqrt{2})R = 0{,}59R.$$

**2 body**

b) Vzhledem k symetrii můžeme větve $ASF$ a $ESB$ v bodě $S$ od sebe oddělit a nakreslit náhradní schéma zapojení (obr. R6). Dostaneme dvě paralelně spojené větve o stejném odporu $R''$. Platí

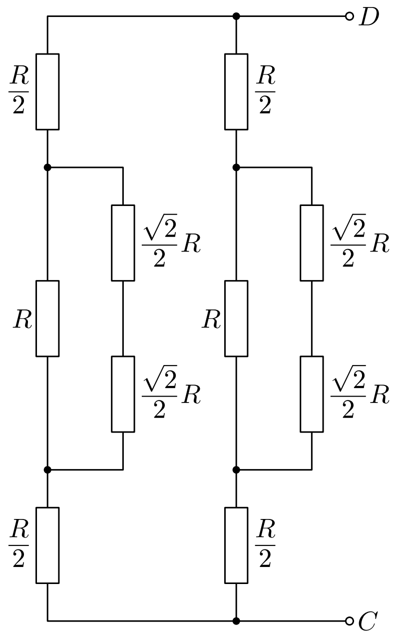
$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R\sqrt{2}},$$

z čehož $R' = (2-\sqrt{2})R$. Potom

$$R'' = \frac{R}{2} + (2-\sqrt{2})R + \frac{R}{2} = (3-\sqrt{2})R,$$

z čehož

$$R_{\mathrm{CD}} = \frac{R''}{2} = \frac{3-\sqrt{2}}{2} = 0{,}79R.$$

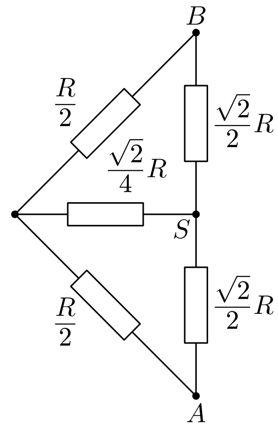



Obr. R6

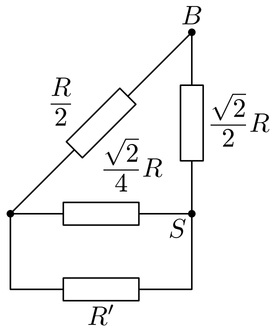
**3 body**

c) „Překlopíme“ pravou část obvodu podle osy souměrnosti $AB$ doleva. Paralelní kombinací rezistorů $R$, $R$ dostaneme $\frac{R}{2}$; paralelní kombinací rezistorů o odporu $\frac{\sqrt{2}}{2}R$, $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ dostaneme $\frac{\sqrt{2}}{4}R$. Náhradní schéma takto vzniklého obvodu je uvedeno na obr. R7. Toto náhradní schéma dále překreslíme dle obr. R8. Velikost odporu $R'$ z obr. R8 je dána vztahem

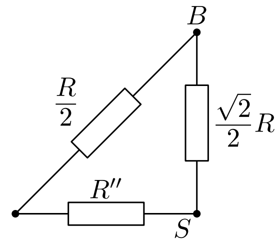
$$R' = \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}R = \frac{\sqrt{2}+1}{2}R.$$



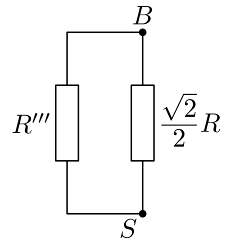

Obr. R7




Obr. R8




Obr. R9




Obr. R10

Dalším zjednodušením obvodu z obr. R8 vznikne obvod na obr. R9, kde velikost odporu $R''$ je dána vztahem $\frac{1}{R''} = \frac{1}{R'} + \frac{4}{R\sqrt{2}}$, z čehož po dosazení za $R'$ a úpravě dostaneme

$$R'' = \frac{(\sqrt{2}+2)R}{2(3\sqrt{2}+2)}.$$

Tento obvod dále zjednodušíme dle obr. R10, kde $R''' = R'' + \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{2}+4}{7}R$.

Nakonec můžeme psát $\frac{1}{R_{\mathrm{BS}}} = \frac{1}{R'''} + \frac{2}{\sqrt{2}R}$, z čehož

$$R_{\mathrm{BS}} = \frac{4-\sqrt{2}}{7} = 0{,}37R.$$

**5 bodů**