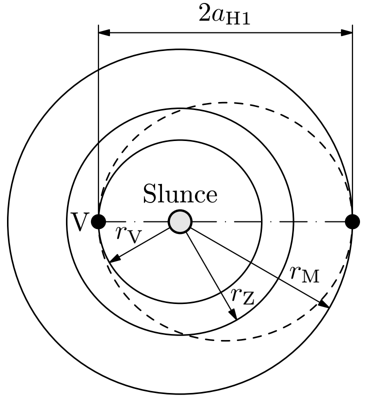
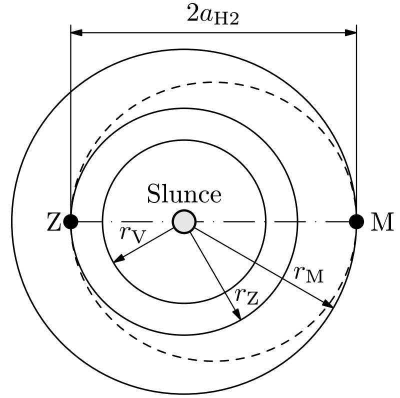
b) Hohmannovy trajektorie pro obě situace jsou znázorněny na obr. R1, R2.



Obr. R1 Mars – Venuše



Obr. R2 Mars – Země

Podle obr. R1 je délka hlavní poloosy Hohmannovy elipsy pro let na Venuši rovna

$$a_{\mathrm{H1}} = \frac{1}{2}(r_{\mathrm{V}} + r_{\mathrm{M}}) = \frac{1}{2}(0{,}72 + 1{,}52)\ \mathrm{AU} = 1{,}12\ \mathrm{AU}.$$

Analogicky pro let na planetu Zemi (obr. R2) platí

$$a_{\mathrm{H2}} = \frac{1}{2}(r_{\mathrm{Z}} + r_{\mathrm{M}}) = \frac{1}{2}(1 + 1{,}52)\ \mathrm{AU} = 1{,}26\ \mathrm{AU}.$$

2 body

c) Označme indexem Z údaje pro Zemi, tj. $a_{\mathrm{Z}} = r_{\mathrm{Z}} = 1$ AU, $T_{\mathrm{Z}} = 365$ dní. Pro let z Marsu na Venuši můžeme podle 3. Keplerova zákona psát $\frac{T_{\mathrm{H1}}^2}{T_{\mathrm{Z}}^2} = \frac{a_{\mathrm{H1}}^3}{a_{\mathrm{Z}}^3}$. Potom je doba letu z Marsu na Venuši rovna

$$T_{\mathrm{L1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a_{\mathrm{H1}}}{a_{\mathrm{Z}}}\right)^3}\, T_{\mathrm{Z}} = 216\ \text{dní}.$$

Analogicky pro let z Marsu na Zemi můžeme psát

$$T_{\mathrm{L2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a_{\mathrm{H2}}}{a_{\mathrm{Z}}}\right)^3}\, T_{\mathrm{Z}} = 258\ \text{dní}.$$

4 body

Řešení úloh krajského kola 51. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 3), I. Volf a M. Jarešová (4),

1.a) Z grafu plyne:

$$a_1 = \frac{20-0}{14-6}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 2{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$a_2 = \frac{15-0}{40-32}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = \frac{15}{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 1{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$a_3 = \frac{25-15}{52-40}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = \frac{5}{6}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0{,}83\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

3 body

b) Vzdálenost mezi vozidly je maximální v čase $t_{\mathrm{m}} = 46$ s, kdy při rozjíždění dosáhne druhé vozidlo velikosti rychlosti prvního vozidla. **1 bod**

c) Vzdálenost mezi vozidly se zvětšovala od času 6 s do času 46 s, za tuto dobu 40 s urazilo první vozidlo rovnoměrným pohybem dráhu

$$s_0 = 20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \cdot 40\ \mathrm{s} = 800\ \mathrm{m}.$$

Druhé vozidlo za stejnou dobu urazilo dráhu během brzdění

$$s_1 = \frac{20(14-6)}{2}\ \mathrm{m} = 80\ \mathrm{m}.$$

a během rozjíždění

$$s_2 = \frac{15(40-32)}{2}\ \mathrm{m} + \frac{(15+20)(46-40)}{2}\ \mathrm{m} = 165\ \mathrm{m}.$$

Maximální vzdálenost mezi vozidly je dána rozdílem drah

$$d_{\mathrm{m}} = s_0 - (s_1 + s_2) = 800\ \mathrm{m} - (80\ \mathrm{m} + 165\ \mathrm{m}) = 555\ \mathrm{m}.$$

3 body

d) V čase $t_{\mathrm{m}} = 46$ s se začíná druhé vozidlo přibližovat k prvnímu, nejprve rovnoměrně zrychleným pohybem po dobu 6 s, poté rovnoměrným pohybem rychlostí 5 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Rovnoměrně zrychleným pohybem se přiblíží o vzdálenost

$$\frac{(25-20)(52-46)}{2}\ \mathrm{m} = 15\ \mathrm{m}.$$

tedy v čase 52 s je okamžitá vzdálenost vozidel 555 m − 15 m = 540 m. Vzájemnou rychlostí 5 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ se pak vozidla přibližují po dobu $\frac{540}{5}$ s = 108 s. K dojetí dojde v čase $t_{\mathrm{k}} = 52\ \mathrm{s} + 108\ \mathrm{s} = 160$ s.

3 body

2. a) Pro rozhodnutí stačí buď vypočítat výšku prvního vrhu, nebo dobu letu druhého míčku:

$$h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}3^2 \text{ m} = 8{,}3 \text{ m},$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 18}{9{,}81}} \text{ m} = 1{,}9 \text{ s}.$$

Z porovnání s údaji ze zadání plyne, že z vyššího okna házel druhý chlapec.

1 bod

b) Počáteční rychlost prvního míčku je $v_{01} = \dfrac{d}{t_1} = \dfrac{24}{1{,}3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 18{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pro počáteční rychlost druhého míčku platí $v_{02} = \dfrac{d}{t_2}$, kde $t_2 = \sqrt{\dfrac{2h_2}{g}}$.
Po dosazení a úpravě dostaneme

$$v_{02} = d\sqrt{\frac{g}{2h_2}} = 24\sqrt{\frac{9{,}81}{2 \cdot 18}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 12{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4 body

c) První míček má v okamžiku dopadu složky rychlosti

$$v_{x1} = v_{01} = \frac{d}{t_1}, \qquad v_{y1} = gt_1.$$

Rychlost dopadu má velikost

$$v_{\text{d}1} = \sqrt{v_{01}^2 + v_{y1}^2} = \sqrt{\frac{d^2}{t_1^2} + (gt_1)^2} = 22{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

U druhého vrhu z rovnic $h_2 = \dfrac{1}{2}gt_2^2$, $v_{y2} = gt_2$ vyloučením času dostaneme svislou složku rychlosti při dopadu $v_{y2} = \sqrt{2gh_2}$.
Rychlost dopadu má velikost

$$v_{\text{d}2} = \sqrt{v_{02}^2 + v_{y2}^2} = \sqrt{\frac{gd^2}{2h_2} + 2gh_2} = \sqrt{g\left(\frac{d^2}{2h_2} + 2h_2\right)} = 22{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4 body

d) Svislá složka rychlosti dopadu roste s výškou vrhu, vodorovná složka rychlosti, tedy velikost počáteční rychlosti potřebné k dosažení daného místa dopadu, se zmenšuje. Jejich složením při vrhu z různých výšek můžeme dostat stejnou hodnotu. **1 bod**

3. a) První vagón má kinetickou energii $E_{\text{k}1} = \dfrac{1}{2}mv^2$,

druhý $E_{\text{k}2} = \dfrac{1}{2} \cdot 3m \cdot \left(\dfrac{v}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{8}mv^2$.

Poměr energií je $\dfrac{E_{\text{k}1}}{E_{\text{k}2}} = \dfrac{4}{3}$.
Větší kinetickou energii má první vagón, a to $\frac{4}{3}$krát.

2 body

b) Velikost hybnosti prvního vagónu je $p_1 = mv$, druhého $p_2 = 3m \cdot \dfrac{v}{2} = \dfrac{3}{2}mv$.

Druhý vagón má větší velikost hybnosti než první, proto se po srážce bude souprava pohybovat ve směru pohybu druhého vagónu.

1 bod

c) Ze zákona zachování hybnosti $\dfrac{3}{2}mv - mv = (3m+m)u$ dostaneme $u = \dfrac{1}{8}v$.

2 body

d) Poměr kinetické energie soupravy po srážce a kinetické energie vagónů před srážkou je

$$\frac{E'_\text{k}}{E_{\text{k}1} + E_{\text{k}2}} = \frac{\frac{1}{2}(m+3m)u^2}{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^2} = \frac{2m\left(\frac{v}{8}\right)^2}{\frac{7}{8}mv^2} = \frac{1}{28}.$$

Na vnitřní energii se tak přemění $\frac{27}{28}$ původní kinetické energie obou vagónů.

3 body

e) V každém okamžiku v průběhu nárazu vagóny na sebe působí podle zákona akce a reakce silou stejné velikosti, proto bude deformace pružin v každém okamžiku stejná.

2 body

4. a) Podle 3. Keplerova zákona platí:

1. Pro dobu oběhu Marsu $\dfrac{T_\text{Z}^2}{T_\text{M}^2} = \dfrac{a_\text{Z}^3}{a_\text{M}^3}$, z čehož $T_\text{M} = \sqrt{\left(\dfrac{a_\text{M}}{a_\text{Z}}\right)^3}\, T_\text{Z} = 684$ dní,

2. Pro dobu oběhu Venuše $\dfrac{T_\text{Z}^2}{T_\text{V}^2} = \dfrac{a_\text{Z}^3}{a_\text{V}^3}$, z čehož $T_\text{V} = \sqrt{\left(\dfrac{a_\text{V}}{a_\text{Z}}\right)^3}\, T_\text{Z} = 223$ dní.

4 body