Fyzika je kolem nás (Pohyb a síla)

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Ivo Volf – Miroslava Jarešová

Obsah

Úvod 3

1 Účinky silového působení 7

2 Různé kontaktní síly 8

Příklad 1 – skálolezec . . . 8
Příklad 2 – automobil . . . 9
Cvičení 1 – motocyklista . . . 10
Cvičení 2 – cyklista . . . 10
Příklad 3 – připínáček . . . 10
Cvičení 3 – fakír . . . 11
Příklad 4 – posunování vlaku – 1 . . . 11
Cvičení 4 – hokejista . . . 11
Příklad 5 – krasobruslení . . . 12
Cvičení 5 – posunování vlaku – 2 . . . 12
Příklad 6 – srážka . . . 13
Cvičení 6 – srážka . . . 14
Cvičení 7 – zpětný ráz . . . 14
Cvičení 8 – brzdná dráha automobilu – 1 . . . 14
Cvičení 9 – brzdná dráha automobilu – 2 . . . 15
Cvičení 10 – brzdná dráha automobilu – 3 . . . 15

3 Gravitační a tíhová síla. Tíha tělesa. 15

Příklad 7 – gravitační a tíhová síla . . . 16
Příklad 8 – dynamický beztížný stav . . . 17
Příklad 9 – síla mezi Zemí a Měsícem . . . 17
Cvičení 11 – pád planetky . . . 18

4 Síly kolmé ke směru pohybu 18

Příklad 10 – cyklista v zatáčce . . . 19
Cvičení 12 – rychlobruslař v zatáčce . . . 21
Cvičení 13 – závody silničních motocyklů . . . 21
Příklad 11 – horská dráha . . . 21
Cvičení 14 – akrobatické lyžování na boulích . . . 23

5 Odpory proti pohybu **23**
Příklad 12 – řetízek 23
Cvičení 15 – šplhavec 24
Cvičení 16 – tobogan na koupališti 25
Příklad 13 – cyklista – 1 26
Cvičení 17 – železniční vagón 26
Příklad 14 – cyklista – 2 27

6 Pohyb s kopce dolů **27**
Příklad 15 – sjezdař 28
Příklad 16 – mezní rychlost sjezdaře 29
Cvičení 18 – mezní rychlost cyklisty 29

Řešení cvičení **30**

Literatura **32**

Úvod

Prošli jste úvodními kapitolami výuky fyziky na střední škole. Zpravidla se začíná kinematikou. Fyzikové nejprve zavedou určitou vhodnou soustavu souřadnic $(O; x, y, z)$, v níž vyjadřují umístění těles, která chtějí popisovat. Protože se však poloha těles může měnit, přidávají další veličinu – čas, takže souřadnice v prostoročasu vyjádříme $(x, y, z; t)$. Sama tělesa mají svou hmotnost m a objem V. Mnoho jevů a dějů lze však popsat i tak, že rozměry samotného tělesa nebudeme uvažovat; vytvoříme model, kterým v řadě případů nahradíme toto těleso – hmotný bod. Hmotný bod pak charakterizujeme hmotností m a polohou v určitém časovém okamžiku $(x, y, z; t)$. Jestliže se souřadnice (x, y, z) nemění ve stále vzrůstajícím čase t (čas – bohužel – nelze zastavit), hovoříme o klidu hmotného bodu. V případě, že se změní poloha hmotného bodu, tj. alespoň jedna ze souřadnic (x, y, z), potom hovoříme o mechanickém pohybu. Odtud pak určujeme dráhu hmotného bodu jako délku s trajektorie, průměrnou rychlost v_p, okamžitou rychlost $\boldsymbol{v}$, okamžité zrychlení $\boldsymbol{a}$, průměrné zrychlení a_p atd. Ale o tom jste již slyšeli na hodinách fyziky a četli v učebnicích středoškolské fyziky. Kinematika nám pak popisuje, jak mechanický pohyb hmotného bodu probíhá, tedy jak se s časem mění poloha, rychlost a zrychlení.

Kinematika však neposkytuje odpověď na otázky typu „proč?“. Jedná se např. o otázky: Proč se začalo těleso pohybovat? Proč se těleso nepohybuje rovnoměrně přímočaře? Proč při pohybu s kopce se lyžař zpočátku pohybuje zrychleně, ale po jisté době se jeho rychlost ustálí? Proč neupevněná tělesa padají ve volném prostoru? Proč lidé mohou spadnout, když trolejbus prudce zabrzdí? Proč automobil dostane smyk na kluzké vozovce?

Tady nastupuje další část mechaniky, zvaná dynamika; $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ = síla, je to tedy nauka o silách a o jejich vlivu na tělesa i na jejich pohyb. Na základní škole jste již poznali, že existují síly mechanického původu (gravitační síla, odporová síla, síla při nárazu těles), ale také síly vzájemného působení elektrických nábojů, síly mezi dvěma póly magnetů. V naší práci se zaměříme na důsledky, které vzniknou při vzájemném mechanickém působení mezi tělesy. V modelu, v němž budeme pracovat, mnohdy tělesa nahradíme jen hmotnými body. To nám zjednoduší jednak grafické zobrazování a také nám usnadní matematické výpočty. Tak např. výpočet gravitační síly mezi Zemí a Měsícem zjednodušíme na působení mezi dvěma hmotnými body, umístěnými v hmotných středech těchto těles. Zjednodušení situací vede sice ke snadnějším výpočtům, ale model je vždy jenom přiblížením ke skutečnosti. Potom výsledkem našich úvah bude pouze hypotéza o řešení problémů, kterou pak musíme ještě ověřit, tj. zjistit spolehlivost získaných výsledků. Úvahy o vzájemném mechanickém působení těles formuloval v roce 1687 slavný anglický matematik a fyzik *Isaac Newton*.

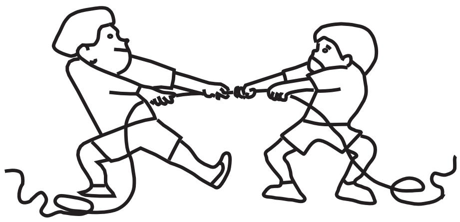
Seznámili jste se s jeho třemi pohybovými zákony. Bylo by dobré, kdybyste si je nyní přečetli ještě jednou:

1. Každé těleso setrvává v relativním klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není přinuceno silovým působením jiných těles tento stav změnit.

2. Zrychlení $\boldsymbol{a}$ tělesa je přímo úměrné výslednici působících sil $\boldsymbol{F}$ a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa m, tj.

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}.$$

3. Síly, kterými na sebe navzájem působí dvě tělesa, jsou stejně velké a navzájem opačného směru, současně vznikají a zanikají.



Obr. 1 Zákon akce a reakce

Je zřejmé, že první pohybový zákon hovoří o nutnosti zavést určitou vztažnou soustavu, v níž budeme zapisovat svá tvrzení o mechanickém pohybu a jeho změnách. Známe-li rovnice o pohybu v jedné takové soustavě, pak je dokážeme použít pro všechny inerciální soustavy, tj. soustavy jsoucí k dané vztažné soustavě v klidu nebo pohybující se rovnoměrně přímočaře (tj. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{konst}$., včetně $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$). Má to dva důsledky: pro $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{konst}$. je $\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \boldsymbol{0}$, tedy i $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ a to, co zjistíme pro danou vztažnou soustavu o silách, platí i pro další vztažné inerciální soustavy. Je třeba připomenout, že o tomto důsledku se ve fyzice příliš nemluví – v úvodním kurzu mechaniky je to pro žáky náročné a vrátit se k základním fyzikálním zákonům na závěr výuky fyziky nezbývá již čas.

Druhý pohybový zákon vyjadřuje kvantitativní vztah mezi silou $\boldsymbol{F}$, popisující vzájemné silové působení těles, a změnou rychlosti $\Delta \boldsymbol{v}$, jež způsobí toto vzájemné působení. Matematicky je to jednoduché

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m \cdot \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}.$$

Zavedeme-li pak hybnost tělesa $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, tedy $\Delta\boldsymbol{p} = m\Delta\boldsymbol{v}$, potom

$$\boldsymbol{F} = \frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\Delta t},$$

neboli

$$\boldsymbol{F} \cdot \Delta t = \Delta\boldsymbol{p},$$

což čteme „impuls síly je roven změně hybnosti“. S tímto faktem se setkává každý, kdo v zimě roztlačuje automobil s nefungujícím akumulátorem: čím delší dobu tlačí automobil, tím větší rychlost automobil získá (toto má samozřejmě i své omezení dané reálným prostředím). Zajímavé je, že k tomu přispěje i to, když ostatní cestující (kromě řidiče!) vystoupí – velikost součinu $\Delta p = m\Delta v$ zůstane sice při $F\Delta t = \Delta p$ stejná, ale v součinu $m\Delta v$ je pro menší činitel m větší činitel Δv. Na tomto příkladu ze života tisíců řidičů chceme ukázat, jak jsou fyzikální zákonitosti hluboko zakořeněny do reality, která nás obklopuje, i jak je běžně používáme. Připomíná to situaci, kdy na tzv. *návětrné straně* hor více a častěji prší než na *závětrné straně*, a to ať žijí na horách lidé s fyzikálním vzděláním nebo ne; jenom fyzikové by však tuto skutečnost dokázali příchozím spolehlivě vysvětlit.

Třetí pohybový zákon vyjadřuje skutečnost o vzájemném silovém působení (interakci) dvou těles; platí

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}.$$

Tento vztah vede k dalším úvahám; pro změnu rychlosti platí

$$m_1 \cdot \frac{\Delta\boldsymbol{v}_1}{\Delta t} = -m_2\frac{\Delta\boldsymbol{v}_2}{\Delta t}$$

a tedy

$$m_1\Delta\boldsymbol{v}_1 = -m_2\Delta\boldsymbol{v}_2,$$

neboli

$$m_1\Delta\boldsymbol{v}_1 + m_2\Delta\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}.$$

Obecněji to vyjádříme

$$m_1(\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_1) + m_2(\boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{0},$$

$$m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2' = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2,$$

což je vyjádření *zákona zachování hybnosti*, jednoho ze čtyř základních zákonů pro mechanické děje.

Připomeňme ještě, že pro pohyb těles platí mechanické zákony ve složitějším tvaru než jen pro hmotné body. Hmotný bod může konat mechanický pohyb, který nazýváme *posunutí* (translace). Těleso může být umístěno na jednom místě, ale kromě translace může ještě rotovat kolem osy, tj. konat otáčivý pohyb. Pohyb složený z posuvného a zároveň i otáčivého může konat např. přední kolo vašeho bicyklu. Tento druh pohybu je již složitější, a proto i matematický zápis bude mnohem složitější.

Ještě jedna poznámka: Budeme se tedy zabývat tím, jak vzájemné působení těles, případně působení silového pole na těleso ovlivňují pohyb tohoto tělesa. Ve skutečnosti však netvrdíme, že Země působí na Měsíc gravitací a kvantitativně toto působení popisujeme gravitační silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$. Tuto skutečnost vyjadřujeme zkráceně: Země působí na Měsíc gravitační silou o velikosti F_{g} nebo dokonce: Na Měsíc působí gravitační síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$.

Síla je tedy fyzikální veličina, kterou měříme např. siloměrem na základě deformačních účinků, jednotkou je newton (1 N). Síla tedy umožňuje kvantifikovat vzájemné působení těles.

Zjišťuje se však, že na těleso (nebo na hmotný bod) často působí několik dalších těles a před fyziky se objevil problém, jak toto vícenásobné působení popsat. To je spojeno s tzv. *skládáním* sil. Zrovna tak, jako tři pohybové zákony, jejichž platnost odvozujeme ze skutečnosti a na základě naší zkušenosti, avšak nemáme pro ně matematické důkazy o jejich platnosti (mají tedy víceméně axiomatický charakter), také pro skládání sil musíme užít princip skládání sil, nejlépe pomocí rovnoběžníku sil.

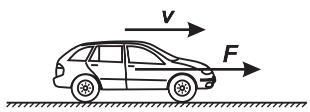
1 Účinky silového působení

To, že tělesa na sebe vzájemně působí, můžeme zjistit na základě účinků silového působení. Můžeme vyjít ze tří forem silového působení

- Časové působení síly $\boldsymbol{F}$ po dobu Δt, vyvolá tzv. *impuls síly* $\boldsymbol{F}\Delta t$, což má za následek změnu hybnosti $\Delta \boldsymbol{p} = \Delta(m\boldsymbol{v})$. Při pohybech rychlostmi mnohem menšími než je rychlost světla ve vakuu, můžeme považovat hmotnost (přibližně) za konstantní, pak $\Delta \boldsymbol{p} = m\Delta \boldsymbol{v}$. Odtud lze psát

  $$\boldsymbol{F}\Delta t = m\Delta \boldsymbol{v} = \Delta \boldsymbol{p}.$$

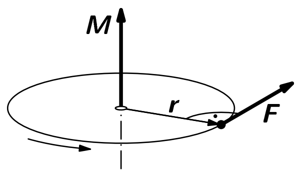
  Nyní, pokud si připomeneme začátek učiva z kinematiky, kdy jsme si zavedli veličinu okamžité zrychlení vztahem $\boldsymbol{a} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$, můžeme napsat

  Obr. 2 Impuls působící síly

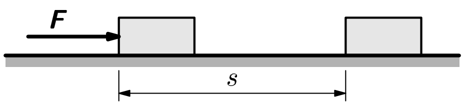
  $$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}.$$

- Otáčivé působení síly $\boldsymbol{F}$ ve vzdálenosti r od osy otáčení (r je vzdálenost vektorové přímky síly $\boldsymbol{F}$ od osy otáčení) popisuje tzv. *moment síly* $\boldsymbol{M}$, jehož velikost $M = Fr$. Otáčivý účinek uvažujeme při rotaci tuhého tělesa, což ale není obsahem této publikace.

  Obr. 3 Otáčivý pohyb

- Dráhové působení síly $\boldsymbol{F}$ při posunutí po dráze s, tedy $F \cdot s$, nám vymezuje tzv. mechanickou práci $W = F \cdot s$ (pro případ, že síla směřuje ve směru posunutí), popř. $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$, když směr síly a směr posunutí svírají úhel α.

  Obr. 4 Posunutí tělesa

Kromě toho mohou síly vyvolat statický nebo dynamický účinek. Při statickém účinku síly na těleso vzniká stav napjatosti, tedy tlak $p = \dfrac{F}{S}$ nebo napětí $\sigma = \dfrac{F}{S}$.

Při dynamickém působení se působiště vektoru síly posunuje společně s tělesem a může způsobit změnu hybnosti (když je $\Delta p > 0$, těleso se zrychluje, je-li $\Delta p < 0$, těleso se zpomaluje), která je buď ve směru nebo proti směru pohybu. Síla může ale také působit kolmo ke směru rychlosti pohybu, a potom má za následek změnu směru pohybu (jde např. o dostředivou sílu). Mohou existovat i složitější případy, kdy působící síla způsobí jednak zrychlení či zpomalení tělesa a současně i změnu směru jeho pohybu.

2 Různé kontaktní síly

Tělesa se mohou setkat a působit na sebe déle trvajícím kontaktním způsobem. To se projevuje tzv. *tahovou* nebo *tlakovou* silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$.

Tahová síla popisuje situaci např. při přetahování lanem na hřišti (viz např. obr. 1). Dvě skupiny sportovců spolu navzájem soupeří a jejich kontakt je zprostředkován lanem délky l o obsahu S kolmého řezu. Napětí σ, vznikající v laně, např. při přetahování, stanovíme užitím vztahu

$$\sigma = \frac{F_\mathrm{t}}{S}.$$

Účinkem napětí dochází zpravidla k prodloužení lana o délku Δl, pro níž (je-li deformace pružná) platí

$$\Delta l \sim l_0 \cdot \sigma.$$

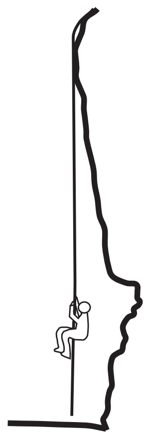
Příklad 1 – skálolezec

Skálolezec Jaroslav o hmotnosti 80 kg je zavěšen na horolezeckém laně o délce 12 m, přičemž o lanu víme, že se účinkem síly 100 N prodlouží o 0,5 %. O kolik se lano prodloužilo při zavěšení skálolezce Jaroslava? Při řešení uvažujte, že se jedná o pružnou deformaci [a].

Řešení

Účinkem síly 100 N se lano o délce 12 m prodlouží o 0,5 %, tj. o 6 cm. Skálolezec o hmotnosti 80 kg působí na lano silou 800 N, tedy celkové prodloužení činí 48 cm.

[a] Informace o zkouškách horolezeckých lan je možno nalézt na http://encyklopedie.seznam.cz/heslo/169099-staticke-lano.htm nebo na http://cs.wikipedia.org/wiki/horolezecke_lano.htm.



Obr. 5 Skálolezec

Pokud se tahová (tlaková) síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ projeví dynamickým účinkem, potom může způsobit změnu hybnosti $\Delta\boldsymbol{p}$, jak uvidíme v následujícím příkladu.

Při řešení úloh z dynamiky v této kapitole nebudeme uvažovat odpor prostředí a dále budeme předpokládat, že zrychlení (zpomalení) pohybu má konstantní velikost (nebude-li řečeno jinak).

Příklad 2 – automobil

Osobní automobil o hmotnosti 1400 kg se pohybuje stálou rychlostí 54 km $\cdot$ h^{-1} (obr. 2). Po vjezdu na dálnici se účinkem tahové síly motoru jeho rychlost během 30 sekund zvětšila na dvojnásobek. a) Jak velká musí být tahová síla motoru? b) Jakou dráhu urazí automobil v průběhu zvyšování rychlosti?

Řešení

a) Zadání úlohy přepíšeme do tvaru pro výpočet následujícím způsobem. Automobil o hmotnosti $m = 1400$ kg se pohybuje stálou rychlostí o velikosti $v_0 = 15\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, takže velikost jeho hybnosti je $p_0 = mv_0 = 21\,000\ \mathrm{kg \cdot m{\cdot}s^{-1}}$. Po zvýšení rychlosti na dvojnásobek, tj. $v = 2v_0$ vzroste také jeho hybnost na dvojnásobek, tj. $p = 2p_0 = 42\,000\ \mathrm{kg \cdot m{\cdot}s^{-1}}$. Změna hybnosti je potom dána vztahem $\Delta p = p - p_0 = p_0 = 21\,000\ \mathrm{kg \cdot m{\cdot}s^{-1}}$. Ze vztahu $F_\mathrm{t} \cdot \Delta t = \Delta p$ plyne

$$F_\mathrm{t} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 700\ \mathrm{N}.$$

b) Uražená dráha je pak dána vztahem

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{3v_0^2}{2a} = \frac{3mv_0^2}{2F} = 675\ \mathrm{m}.$$

Poznámka

1. K řešení úlohy b) lze také velmi snadno dospět užitím zákona zachování mechanické energie, tj. $F \cdot s = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$, dále tento vztah upravit, pak vyjádřit neznámou s z tohoto vztahu, což ale není hlavním obsahem tohoto textu.
2. Třetí způsob je „kinematický“, k výpočtu dráhy použijeme vztahu

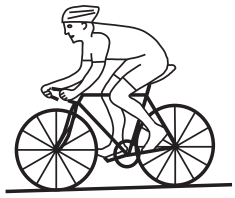
$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t = \frac{3}{2}v_0 t = 675\ \mathrm{m}.$$

Cvičení 1 – motocyklista

Motocyklista s motocyklem o celkové hmotnosti 270 kg dosáhne za 30 s od startu rychlosti 108 km $\cdot$ h^{-1}. Jak velká je urychlující tahová síla motoru motocyklu?

Cvičení 2 – cyklista

Vzhledem ke stavu pneumatik může mladý cyklista o hmotnosti 80 kg i s kolem dosáhnout tahové urychlující síly 200 N. Jaké rychlosti cyklista dosáhne z klidu po 20 s silového působení? Proč se vám nezdá výsledek reálný?

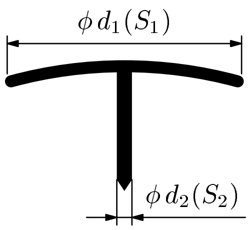


Obr. 6 Cyklista rozjíždějící se po vodorovné rovině

V další části tohoto textu si ukážeme situace, kde se budeme zabývat výpočtem tlakové síly. Tlaková síla popisuje např. statický účinek při zatlačování tzv. připínáčku do dřevěné desky.

Příklad 3 – připínáček

Připínáček má průměr hlavičky $d_1 = 10$ mm a tzv. nožku, jejíž průměr je $d_2 = 1{,}0$ mm (obr. 7). Budeme-li tlačit palcem silou o velikosti 80 N na hlavičku připínáčku, bude nožka připínáčku působit tlakovou silou do desky. Určete tlak p_1, kterým bude působit připínáček na palec a tlak p_2, kterým bude působit připínáček na desku.



Obr. 7 Řez připínáčkem

Řešení

Tlak budeme počítat ze vztahu $p = \frac{F_t}{S}$. Tlaková síla je v obou případech stejně velká $F_t = 80$ N, ale budou se lišit tlaky:

$$p_1 = \frac{F_t}{S_1} = \frac{80}{\pi \frac{0{,}01^2}{4}} \text{ Pa} = 1 \text{ MPa}, \quad p_2 = \frac{F_t}{S_2} = \frac{80}{\pi \frac{0{,}001^2}{4}} \text{ Pa} = 100 \text{ MPa}.$$

Budeme si pamatovat, že pokud bychom si už museli sednout na připínáček, měl by mít plošku nahoru a nožičku dolů. Ve skutečnosti je průměr nožičky připínáčku roven jen zlomku milimetru a tedy tlak bude ještě větší.

Cvičení 3 – fakír

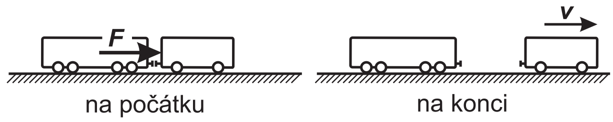
Fakír bývá zpravidla vyhublý muž o hmotnosti asi 60 kg, který si lehne na lůžko, jež představuje 900 hřebíků, jejichž hroty jsou poněkud upraveny, takže po dotyku s tělem je styčná ploška jednoho hřebíku asi 2 mm^2. Jaký tlakem působí hřeby na fakírovo tělo?

Dynamický účinek tlakové síly vede ke změně hybnosti na základě známého vztahu $\boldsymbol{F} \cdot \Delta t = \Delta \boldsymbol{p}$. Podívejme se na několik situací, kde lze tohoto vztahu prakticky použít.

Příklad 4 – posunování vlaku – 1

Při posunování působila lokomotiva z klidu tlakovou silou 20 kN na vagón o hmotnosti 50 tun po dobu 10 s, potom lokomotiva přibrzdila a vagón se dále pohyboval samostatně (obr. 9). Určete a) jak se změnila rychlost vagónu při posunování, b) jakou dráhu urazil vagón do okamžiku, kdy lokomotiva přibrzdila.

Obr. 8 Lokomotiva s vagónem



Obr. 9 Posunování vlaku – 1

Řešení

a) Lokomotiva působí na vagón silou o velikosti $F = 20$ kN po dobu $\Delta t = 10$ s, takže impuls působící síly je $F\Delta t = 200$ kN · s; stejně velká je i změna hybnosti $\Delta p = 200\,000$ kg · m·s^{-1}. Odtud výsledná rychlost při posunování je 4,0 m·s^{-1}, zrychlení pohybu je 0,4 m·s^{-2}.

b) Vagón získal uvedenou rychlost na dráze $s = 20$ m.

Cvičení 4 – hokejista

Hokejista udělil puku o hmotnosti $m = 200$ g tahem hokejky za dobu 0,5 s výslednou rychlost 12 m·s^{-1}. Určete, jak velkou silou působil hokejista na puk.

Obr. 10 Hokejista

Velmi zajímavá jsou krátkodobá setkání těles v uzavřené (izolované) soustavě, v níž platí tzv. *zákon zachování hybnosti*. Při nich vzájemně působí na tělesa tzv. *rázové síly*, o jejichž časovém průběhu toho příliš mnoho nevíme. Uplatňují se např. ve sportu (driblování, hlavičky, kopy, tenisové a volejbalové podání, stolní tenis aj.) nebo i v dopravě (různé havárie).

Úlohy tohoto typu řešíme na základě znalosti počáteční a koncové hodnoty hybnosti.

Příklad 5 – krasobruslení

Krasobruslař o hmotnosti 75 kg jede po ledu rychlostí 1,2 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a uchopí stojící krasobruslařku o hmotnosti 45 kg; dále pak jedou společně. Určete výslednou rychlost (obr. 11 [a]). Dále pak určete, jak se změnila hybnost každého z obou krasobruslařů.

[a] Fotografie – MS Canada 2006.
Více je na http://www.skatetoday.com/.

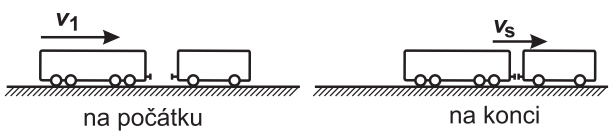
Obr. 11 Krasobruslení

Řešení

Na počátku je hybnost krasobruslaře je 90 $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$, hybnost krasobruslařky je nulová, výsledná hybnost je tedy 90 $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$. Na konci je hybnost obou krasobruslařů 90 $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$, výsledná rychlost pak je 0,75 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Hmotnější krasobruslař sníží svou hybnost o 33,75 $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$, lehčí krasobruslařka zvýší svou hybnost o 33,75 $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$.

Cvičení 5 – posunování vlaku – 2

Při posunování narazí lokomotiva o hmotnosti $m_1 = 120$ t, jedoucí rychlostí $v_1 = 5{,}4\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, na nehybný vagón o celkové hmotnosti $m_2 = 60$ t. Po nárazu se lokomotiva s vagónem automaticky spojily a jely dále společnou rychlostí (obr. 12). Určete tuto rychlost.

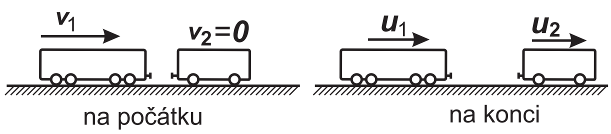


Obr. 12 Posunování vlaku – 2

Nyní si ještě ukážeme, jak postupovat v případě, že lokomotiva narazí do vagónu a dojde k dokonale pružné srážce. Tato úloha poněkud přesahuje rámec tohoto textu, ale přesto si ji uvedeme, abychom si uvědomili, že ne vždy vystačíme při řešení úloh tohoto typu pouze se zákonem zachování hybnosti.

Příklad 6 – srážka

Zabývejme se nyní situací, kdy lokomotiva o hmotnosti $m_1 = 120$ t, jedoucí rychlostí $v_1 = 5{,}4\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, narazí do stojícího vagónu o hmotnosti $m_2 = 60$ t. Budeme uvažovat, že dojde k dokonale pružné srážce a lokomotiva předá část své hybnosti vagónu. V důsledku toho se lokomotiva bude pohybovat rychlostí $\boldsymbol{u}_1$ v původním směru, přičemž uvede do pohybu stojící vagón rychlostí $\boldsymbol{u}_2$ (obr. 13). Určete velikosti rychlostí obou těles po srážce.



Obr. 13 Srážka lokomotivy s vagónem

Řešení

Protože na soustavu lokomotiva – vagón nepůsobí žádné vnější síly, použijeme zákon zachování hybnosti. Platí

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 = m_1 \boldsymbol{u}_1 + m_2 \boldsymbol{u}_2.$$

Vzhledem k tomu, že všechny vektory rychlostí mají stejný směr, můžeme výše uvedenou rovnici přepsat do skalárního tvaru

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \tag{1}$$

Vidíme, že jsme dostali jednu rovnici o dvou neznámých. Abychom úlohu vyřešili, musíme napsat ještě jednu rovnici, a to je rovnice získaná ze zákona zachování mechanické energie (připomeňme si, že v našich úlohách zatím neuvažujeme s odporem prostředí), tj.

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2. \tag{2}$$

Rovnice (1) a (2) dále upravíme na tvar

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - u_1) &= m_2 u_2, & (3)\\ m_1(v_1^2 - u_1^2) &= m_2 u_2^2. & (4) \end{aligned}$$

Vydělíme-li nyní rovnici (4) rovnicí (3), dostaneme

$$v_1 + u_1 = u_2,$$

z čehož

$$u_2 = v_1 + u_1. \tag{5}$$

Po dosazení (5) do (1) a úpravě dostaneme

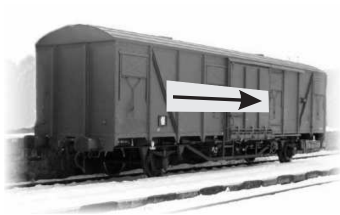
$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = 1{,}8\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

Po dosazení tohoto vztahu do (5) a úpravě dostaneme

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 7{,}2\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

Cvičení 6 – srážka

Při posunování vlaku lokomotiva o hmotnosti $m_1 = 120$ t tlačí před sebou vagón o hmotnosti $m_2 = 60$ t. V určitém okamžiku lokomotiva působením brzdné síly přibrzdí, vagón se od ní oddělí a dál se pohybuje sám rychlostí o velikosti $v_1 = 5{,}4\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.



Obr. 14 Jedoucí vagón

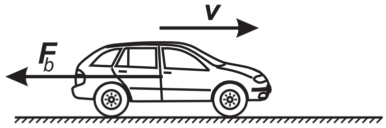
Tento vagón pak narazí do stojícího vagónu o hmotnosti $m_3 = m_2$. Srážku obou vagónů považujte za dokonale pružnou. Popište pohyb vagónů po srážce.

Cvičení 7 – zpětný ráz

Při střelbě z pušky vyletěla z hlavně střela o hmotnosti 25 g rychlostí 600 $\mathrm{ms^{-1}}$. Puška má hmotnost 5,0 kg. a) Určete rychlost zpětného rázu volně zavěšené pušky. b) Jak se změní situace, když pušku přitiskne člověk (stojící na velmi hladkém ledě) o hmotnosti 70 kg k ramennímu kloubu?

Cvičení 8 – brzdná dráha automobilu – 1

Na určitém úseku své dráhy se automobil o hmotnosti 1200 kg pohybuje rychlostí 45 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a dokáže zastavit účinkem brzdicí síly 2500 N (obr. 15). Za jak dlouho automobil zastavil a na jaké dráze?



Obr. 15 Brzdící automobil

Cvičení 9 – brzdná dráha automobilu – 2

Na stejném úseku jel stejným automobilem jiný řidič rychlostí 54 km $\cdot$ h^{-1}. Za jak dlouho a na jaké dráze zastaví automobil za těchto podmínek? Proč je nebezpečné překračovat rychlost povolenou na daném úseku?

Cvičení 10 – brzdná dráha automobilu – 3

Při jízdě na náledí se brzdící síla snižuje, v našem případě se sníží na hodnotu 1000 N. Jak se změní výsledky cvičení 8 a 9?

3 Gravitační a tíhová síla. Tíha tělesa.

Již v roce 1666 se Isaac Newton pokusil kvantitativně vyjádřit vzájemné gravitační působení těles (gravitační sílu) a tím vypočítat základní charakteristiky pro ***působení těles na dálku***. Měsíc, aniž by byl mechanicky připoután k Zemi, se kolem nás pohybuje tak, že je vázán gravitační silou. Když označíme M_{z} hmotnost Země a r vzdálenost tělesa o hmotnosti m od středu Země, potom velikost gravitační síly, kterou je toto těleso přitahováno k Zemi, je rovna $F_{\mathrm{g}} = \varkappa \frac{mM_{\mathrm{z}}}{r^2}$, což plyne přímo z tzv. *Keplerových zákonů*.

Gravitační síla vyjadřuje tedy gravitační působení mezi tělesy o hmotnostech m, M_{z}, ve vzájemné vzdálenosti r (jde o vzdálenost hmotných středů těchto těles), označujeme ji $\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$. Již na tomto místě vidíme, že jde o poněkud jiný pojem než byl fyzikální termín „gravitační síla", jak jste ho používali na základní škole. Tam byla tímto termínem označována síla, kterou Země působí na tělesa v těsné blízkosti povrchu Země, tedy včetně účinků rotace. Na povrchu rotující Země totiž na všechna tělesa působí odstředivá síla o velikosti $F_o = m \cdot r \cdot \omega^2$, která je kolmá na osu rotace a směřuje od osy rotace (na pólu nulová, na rovníku největší, v různých zeměpisných šířkách je nutno provést příslušný výpočet). Kromě zemských pólů tedy na těleso působí síla vždy menší než je síla gravitační. Tuto sílu označujeme jako sílu tíhovou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$ – tíhová síla je tedy výslednicí síly gravitační a odstředivé, tj. $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{g}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{o}}$. Tíhová síla je tedy síla gravitačního původu, kterou působí Země na tělesa spojená s jejím rotačním pohybem. Platí $F_{\mathrm{G}} < F_{\mathrm{g}}$, s výjimkou zemských pólů.

V důsledku působení tíhové síly na tělesa v blízkosti povrchu Země, padají tato tělesa svislým směrem (pozor: abychom byli přesní, museli bychom uvažovat ještě tzv. *sílu Corriolisovu*, která se projeví např. větším opotřebením jedné kolejnice při jízdě vlaků, jezdících stále jen jedním směrem od severu k jihu), trajektorie pohybu těles při pohybu v homogenním tíhovém poli Země se zakřivuje (vodorovný a šikmý vrh). To vše ovlivňuje mnoho dějů a jevů. Běžně se s důsledky tíhové síly setkáváme např. v různých oblastech sportu. Podle 2. Newtonova pohybového zákona je tíhová síla dána vztahem $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}} = m\boldsymbol{g}$, kde $\boldsymbol{g}$ je tíhové zrychlení. Velikost tíhového zrychlení závisí na místě na povrchu Země (na pólu je $g_{\mathrm{p}} = 9{,}83\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, na rovníku je $g_{\mathrm{r}} = 9{,}78\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, normální tíhové zrychlení $g_{\mathrm{n}} = 9{,}80665\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, což odpovídá 45° s. š. v nulové nadmořské výšce). V místě se zeměpisnou šířkou φ s odchylkou menší než $0{,}04\ \mu\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ lze tíhové zrychlení vypočítat ze vzorce

$$g = 9{,}780\,318\,5(1 + 0{,}005\,278\,895 \sin^2\varphi + 0{,}000\,023\,462 \sin^4\varphi)\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Třetí silou, se kterou se můžeme setkat, je síla, kterou působí těleso na podložku nebo závěs. Tato síla se nazývá *tíha* a označuje se $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$. Má sice stejnou velikost a stejný směr jako síla tíhová, ale obě se liší v působišti. Působiště tíhové síly umísťujeme do těžiště tělesa, naproti tomu tíha působí v místě závěsu nebo ve středu dotykové plochy podložky.

Příklad 7 – gravitační a tíhová síla

Porovnejte velikost gravitační a tíhové síly malého tělesa o hmotnosti $m = 10\ \mathrm{kg}$, umístěného na rovníku. Vzdálenost středů obou těles (tj. rovníkový poloměr Země) je $R = 6\,378\,160\ \mathrm{m}$, hmotnost Země uvažujte v tomto případě $M_{\mathrm{z}} = 5{,}983 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$.

Řešení

Velikost gravitační síly působící na výše uvedené těleso na rovníku je dána vztahem

$$F_{\mathrm{g}} = \varkappa \frac{mM_{\mathrm{z}}}{R^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10 \cdot 5{,}983 \cdot 10^{24}}{6\,378\,160^2}\ \mathrm{N} \doteq 98{,}10\ \mathrm{N}.$$

Velikost odstředivé síly je dána vztahem

$$F_{\mathrm{o}} = m\omega^2 R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R = 10 \cdot \frac{4\pi^2}{86\,400^2} \cdot 6\,378\,160\ \mathrm{N} \doteq 0{,}34\ \mathrm{N}.$$

Velikost tíhové síly je potom

$$F_{\mathrm{G}} = F_{\mathrm{g}} - F_{\mathrm{o}} = (98{,}10 - 0{,}34)\ \mathrm{N} = 97{,}76\ \mathrm{N}.$$

Z výše uvedeného postupu je zřejmé, že $F_{\mathrm{g}} - F_{\mathrm{G}} = F_{\mathrm{o}} = 0{,}34\ \mathrm{N}$. Tento rozdíl představuje asi 0,35% velikosti gravitační síly.

Poznámka

1. Užitím 2. Newtonova zákona můžeme nyní určit velikost gravitačního, tíhového a odstředivého zrychlení na rovníku:

$$a_{\mathrm{g}} \doteq 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \quad g \doteq 9{,}78\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}, \quad a_{\mathrm{o}} = 0{,}034\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

2. Tímto postupem jsme si ukázali postup výpočtu tíhového zrychlení na rovníku, jehož hodnota je v souladu s hodnotou ve výše uvedeném textu.

Příklad 8 – dynamický beztížný stav

Jaká by musela být doba rotace Země ($M_{\mathrm{z}} \doteq 6 \cdot 10^{24}$ kg, $R_{\mathrm{z}} = 6378$ km), aby tělesa na rovníku byla v beztížném stavu?

Řešení

V beztížném stavu je těleso, pokud je jeho tíha $G = 0$ N, tedy např. na osobní váze je na ukazateli nula. Toho lze dosáhnout v případě, že

$$F_{\mathrm{o}} = F_{\mathrm{g}},$$

tj.

$$m R_{\mathrm{z}} \omega^2 = \varkappa \frac{m M_{\mathrm{z}}}{R_{\mathrm{z}}^2},$$

tedy $\omega^2 = \varkappa \frac{M_{\mathrm{z}}}{R_{\mathrm{z}}^3}$, $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\varkappa \frac{M_{\mathrm{z}}}{R_{\mathrm{z}}^3}}$, z čehož

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_{\mathrm{z}}^3}{\varkappa M_{\mathrm{z}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{(6{,}378 \cdot 10^6)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24}}}\ \mathrm{s} = 5\,059\ \mathrm{s} = 84\ \mathrm{min}\ 19\ \mathrm{s}.$$

Příklad 9 – síla mezi Zemí a Měsícem

Jak velkou gravitační silou působí Země na Měsíc, je-li Měsíc ve střední vzdálenosti 384 400 km od Země, dále ve vzdálenosti nejmenší 356 400 km nebo největší 407 700 km. Hmotnost Země uvažujte $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, hmotnost Měsíce je rovna $\frac{1}{81} M_{\mathrm{z}}$.

Řešení

Použijeme téhož vztahu pro všechny případy, a to

$$F_{\mathrm{g}} = \varkappa \cdot \frac{M_{\mathrm{z}} \cdot M_{\mathrm{m}}}{r^2},$$

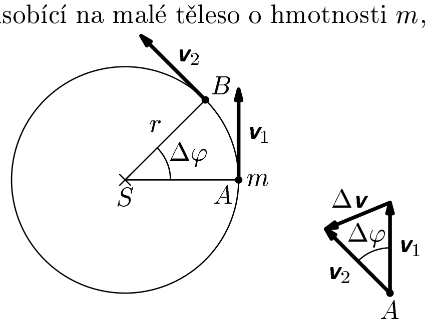
kde $\varkappa M_{\mathrm{z}} M_{\mathrm{m}} \doteq 2{,}9447 \cdot 10^{37}\ \mathrm{N \cdot m^2}$.
Postupným dosazováním dostaneme $1{,}992 \cdot 10^{20}$ N; $2{,}318 \cdot 10^{20}$ N; $1{,}772 \cdot 10^{20}$ N. Rozdíl mezi krajními hodnotami je $5{,}46 \cdot 10^{19}$ N.

Cvičení 11 – pád planetky

Vlivem pádu planetky do Tichého oceánu se doba rotace Země zmenšila o 1%. Mohla se změnit nějak výrazně hodnota tíhového zrychlení?

4 Síly kolmé ke směru pohybu

V této kapitole se zaměříme na situace, kdy síly působící v každém místě trajektorie kolmo ke směru pohybu nemají vliv na velikost rychlosti, ale na směr rychlosti. Příkladem je dostředivá síla, působící na malé těleso o hmotnosti m, které se pohybuje po trajektorii tvaru kružnice. V místě A má rychlost velikost $v_1 = r\omega$, kde r je poloměr kružnice a ω je úhlová rychlost, kterou se otáčí úsečka SA (obr. 16), tzv. *průvodiče*. V místě B má rychlost velikost $v_2 = r\omega = v_1$, ale obě rychlosti se liší směrem – vektory rychlostí $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$ svírají týž úhel $\Delta\varphi$ jako průvodiče SA, SB. Protože $\Delta\varphi = \omega\Delta t$, můžeme psát, že délka oblouku



Obr. 16 Pohyb po kružnici

$$\overset{\frown}{AB} = r\Delta\varphi = r\omega\Delta t = v\Delta t,$$

z čehož je zřejmé, že délka oblouku $\overset{\frown}{AB}$ bude různá od délky úsečky $\overline{AB}$.

Z podobnosti trojúhelníků ΔABS a trojúhelníku sestrojeného ze stran v_1, v_2, Δv plyne

$$\frac{\Delta v}{v_1} = \frac{\overline{AB}}{r}$$

a tedy

$$\Delta v = v_1 \cdot \frac{\overline{AB}}{r}.$$

Jestliže doba Δt, za níž malé těleso urazí vzdálenost $\widehat{AB}$, nebude příliš velká, tj. $\Delta t \to 0$, a ani rychlost $v_1 = v_2 = v$ nebude příliš velká, pak $\Delta v = v \cdot \dfrac{v\Delta t}{r}$. Po úpravě $\Delta v = \dfrac{v^2}{r}\Delta t$, z čehož

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} = a_{\mathrm{d}}.$$

Tímto postupem jsme získali vztah pro výpočet velikosti zrychlení, které má směr kolmý ke směru okamžité rychlosti pohybujícího se malého tělesa (které můžeme považovat za hmotný bod), jde o tzv. *dostředivé zrychlení*. Dostředivá síla má pak podle 2. Newtonova pohybového zákona velikost

$$F_{\mathrm{d}} = m\frac{v^2}{r}.$$

K dostředivé síle $\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}$ existuje také síla odstředivá

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{o}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}.$$

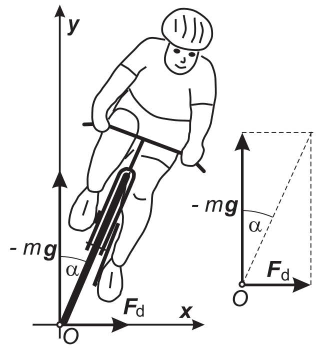
Se kterou z těchto sil budeme počítat, to záleží na volbě vztažné soustavy (je-li inerciální nebo neinerciální), jak uvidíme v následujícím příkladu.

Příklad 10 – cyklista v zatáčce

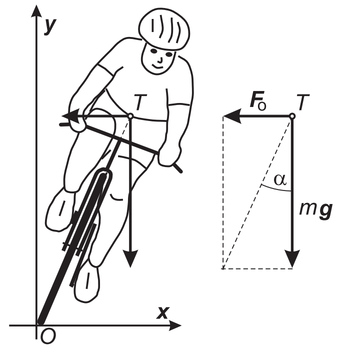
Cyklista o hmotnosti 80 kg i s kolem projíždí zatáčkou o poloměru $r = 10$ m poprvé rychlostí 5 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, podruhé rychlostí 10 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Aby cyklista projel zatáčkou bezpečně, musí se s kolem sklonit o úhel α vzhledem ke svislému směru. Určete tento úhel a vysvětlete, proč se cyklista při jízdě musel sklonit. Počítejte s hodnotou tíhového zrychlení $g \doteq 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Řešení

Úlohu budeme řešit z hlediska dvou soustav: inerciální soustavy spojené se silnicí (obr. 17) a neinerciální soustavy spojené s cyklistou (obr. 18).



Obr. 17 Síly působící na cyklistu v inerciální soustavě souřadnic spojené s vozovkou



Obr. 18 Síly působící na cyklistu v neinerciální soustavě souřadnic spojené s cyklistou

Z hlediska inerciální soustavy souřadnic spojené s vozovkou můžeme říci, že podložka působí na pneumatiku jízdního kola jednak reakcí podložky $-m\boldsymbol{g}$, dále dostředivou silou o velikosti $F_\mathrm{d} = m\dfrac{v^2}{r}$. Výslednice musí působit v rovině kola, aby průjezd zatáčkou byl bezpečný (jinak se kolo vychýlí příčně ke směru pohybu a cyklista spadne „do zatáčky“ nebo se vychýlí „ze zatáčky“. Pro úhel α platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_\mathrm{d}}{mg} = \frac{m\dfrac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg}. \tag{6}$$

Z hlediska neinerciální soustavy souřadnic spojené s cyklistou by na cyklistu působila síla tíhová $m\boldsymbol{g}$ a síla odstředivá $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ (obr. 18). Početní vztahy pro výpočet úhlu α by pak už byly stejné jako v případě inerciální soustavy (viz obr. 17, 18).

Ze vztahu (6) pro $\operatorname{tg}\alpha$ je vidět, že velikost úhlu α nezávisí na hmotnosti pohybujícího se cyklisty.
Po dosazení do vztahu (6) za $v_1 = 5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_2 = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dostaneme

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{25}{100} = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 14°,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{100}{100} = 1{,}0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 45°.$$

Na závěr této úlohy se pokuste si ještě sami zodpovědět otázku:
„Jakou nejmenší velikost musí mít třecí síla mezi pneumatikami a vozovkou, aby cyklista nedostal v zatáčce smyk? (Uvědomme si, že bez existence této síly by výše popsaný pohyb cyklisty v zatáčce nebyl možný.)

Cvičení 12 – rychlobruslař v zatáčce

Obr. 19 Rychlobruslař v zatáčce

Rychlobruslař dosahuje při jízdě rychlosti 12 m·s^{-1}. V zatáčce se může ze svislého směru vyklonit o 30° až 40°, aby jeho jízda byla dostatečně bezpečná. Jaký musí být poloměr zatáčky na rychlobruslařské dráze? Tíhové zrychlení $g = 10$ m·s^{-2}.

Cvičení 13 – závody silničních motocyklů

Obr. 20 Silniční motocykl

Závody silničních motocyklů je soutěž, v níž motocyklisté zdolávají trať plnou ostrých zatáček, a to co nejvyšší rychlostí. Proto se motocyklisté při jízdě vyklánějí ze svislého směru, že se takřka kolenem dotýkají podložky. V jednom případě vidíme, že se motocykl vyklonil o úhel 50° od svislého směru, poloměr zatáčky může být 30 až 50 m, $g = 10$ m·s^{-2}. Jaké rychlosti může motocykl při průjezdu dosáhnout?

Příklad 11 – horská dráha

Ve velkých zábavních parcích mívají tzv. *horskou dráhu*. Malý vozík s cestujícími se pohybuje po kolejnicích, při svém pohybu vystoupá do výšky několika desítek metrů. Pak sjíždí prudce dolů a projíždí smyčkou o poloměru 20 m ve svislé rovině (obr. 21). Určete
a) jakou rychlost musí mít vozíček v nejvyšším bodě smyčky, aby projel bezpečně smyčkou,
b) jakou rychlostí musí projet v nejnižším bodě smyčky,
c) největší výšku h_0, z níž musí vozík sjet, aby projel bezpečně smyčkou.
Při řešení úlohy budeme uvažovat jen pohyb posuvný s velmi malým třením, $g = 10$ m·s^{-2}.

Obr. 21 Horská dráha

Řešení

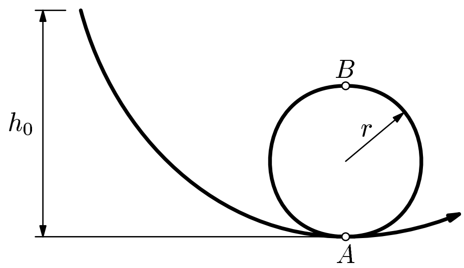
a) V místě B musí platit pro velikost odstředivé síly F_0 a síly tíhové mg vztah $F_0 > mg$, tedy

$$m\frac{v_\mathrm{B}^2}{r} > mg.$$

Pro rychlost v bodě B dostáváme $v_\mathrm{B}^2 > rg$, tedy

$$v_\mathrm{B} > \sqrt{rg}.$$

Pro dané hodnoty je
$v_\mathrm{B} > 14{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 51\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$.



Obr. 22 Smyčka horské dráhy

b) K výpočtu minimální rychlosti v bodě A je nutné užít zákon zachování mechanické energie. V dolní poloze A bude mít vozík rychlost o velikosti v_A, pohybovou energii $\frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2$ a polohovou energii rovnou nule. V horní poloze B dosahuje vozík rychlosti nejméně $v_\mathrm{B} = \sqrt{rg}$, pohybová energie vozíku v této poloze je $\frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2$. Vozík má v této poloze polohovou energii $mgh_0 = mg\cdot 2r$.

Za nereálného předpokladu, že nebudeme uvažovat tření a další odpory proti pohybu, můžeme napsat energetickou rovnici

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 = mg\cdot 2r + \frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2,$$

z čehož (po dosazení za v_B) dostaneme

$$v_\mathrm{A} = \sqrt{v_\mathrm{B}^2 + 4gr} = \sqrt{5gr} = 31{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 114\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

c) Nyní určíme nejmenší výšku h_0 na trase, z níž by musel za stejných předpokladů neexistence odporů sjet vozík. Napíšeme energetickou rovnici pro nejvyšší polohu h_0 a místo B. Platí

$$mgh_0 = mg\cdot 2r + \frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2,$$

ale současně také platí (podle úlohy a)) $v_\mathrm{B} > rg$. Po dosazení za v_B do výše uvedené energetické rovnice dostaneme

$$mgh_0 > mg\cdot 2r + \frac{1}{2}mgr,$$

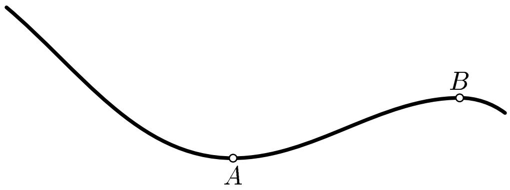
z čehož

$$h_0 > 2{,}5r = 50\ \mathrm{m}.$$

S ohledem na existující valivý odpor i další odpory je tedy jasné, že při jízdě na horské dráze (dračí jízdě, atrakci Big Bad Woolf aj.) se vozík s cestujícími vyšplhá do výšky 60 m, aby pak bezpečně projel svislou smyčkou, při níž cestující (pevně připoutáni k sedadlu) projedou v horní poloze smyčky hlavou dolů.

Cvičení 14 – akrobatické lyžování na boulích

Při akrobatickém lyžování na boulích sjíždí lyžař o hmotnosti 80 kg po prudkém svahu. Nejprve vjede do dolíku o poloměru 10 m, kde v bodě A dosáhne rychlosti 15 m·s^{-1}, pak vjede na kopeček o poloměru 8 m. Jaké síly by působily na lyžaře v místech A, B (obr. 23)? Uvažujte, že výškový rozdíl mezi místy A a B je nepatrný ($g = 10$ m·s^{-2}).



Obr. 23 Pohyb lyžaře

Obr. 24 Akrobatické lyžování

5 Odpory proti pohybu

Smykové tření

Nejčastější odporovou silou, kterou musíme překonávat např. při vlečení tělesa, abychom ho udrželi v rovnoměrném pohybu, je třecí síla.

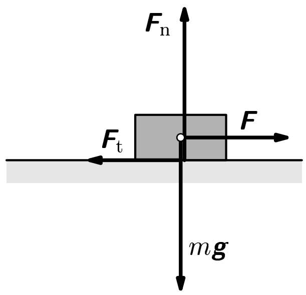
Při smýkání tělesa po podložce závisí třecí síla na kolmé tlakové síle $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ a na jakosti styčných ploch, což udává tzv. *součinitel smykového tření* f.

Pro velikost třecí síly platí

$$F_\mathrm{t} = F_\mathrm{n} \cdot f.$$

Pohybuje-li se těleso po vodorovné rovině, pak pro velikost třecí síly platí

$$F_\mathrm{t} = f \cdot mg.$$

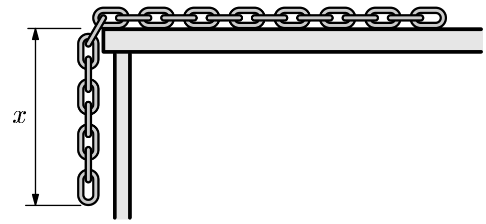


Obr. 25 Třecí síla

Příklad 12 – řetízek

Na schodišti v panelovém domě ve 4. podlaží si hrají dva chlapci – osmáci. Tenký řetízek o délce 2,0 m a o hmotnosti 200 g natáhli na podlahu a kousek nechali viset ve volném prostoru.

Postupně délku převisu zvětšovali, až při hodnotě $x = 40$ cm se řetízek začal pohybovat sám. Dal by se z této informace stanovit součinitel smykového tření při pohybu řetízku po podložce?



Obr. 26 Řetízek

Řešení

Jestliže okamžitá délka převislé části je x, potom na podložce leží část řetízku o délce $l - x$. Hmotnost řetízku je $m = 200$ g, hmotnost délky 1 cm je $\frac{m}{l}$, hmotnost převislé části řetízku je $m_1 = \frac{m}{l} \cdot x$, zbylá část řetízku má hmotnost $m_2 = \frac{m}{l}(l-x)$. Když se řetízek začne sám pohybovat, musí platit $m_1 g > f m_2 g$, a tedy

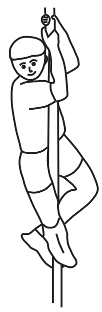
$$f < \frac{m_1}{m_2} = \frac{x\dfrac{m}{l}}{(l-x)\dfrac{m}{l}} = \frac{x}{l-x}.$$

Pro dané hodnoty $f < \frac{40}{160} = 0{,}25$.

Objevili jsme netradiční způsob, jak stanovit součinitele smykového tření. Při pokusu jsme zjistili, že uvést těleso do pohybu vyžaduje větší sílu, než těleso v pohybu udržet. Proto je součinitel smykového tření v klidu větší než součinitel smykového tření za pohybu.

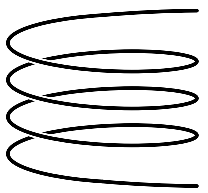
Cvičení 15 – šplhavec

Při tělesné výchově žáci musí někdy šplhat. Šplh se posuzuje jednak při pohybu po svislé tyči, jednak při šplhání na volně visícím laně. Malý sportovec má hmotnost 65 kg, jeho kamarádka 45 kg. Součinitel smykového tření sportovní obuvi při pohybu po laně dosahuje 0,45, na tyči 0,30. Jak velké přítlačné síly musí působit, je-li sportovec na laně (tyči) v klidu či při šplhání. Pro řešení si proveďte analýzu pohybu.



Obr. 27 Šplhavec

Cvičení 16 – tobogan na koupališti



Obr. 28 Smyčky

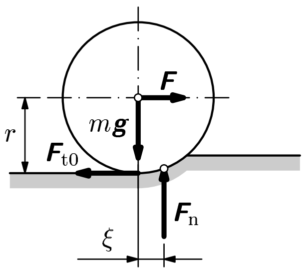
Na koupališti je instalován tobogan o průměru 8,0 m, který má tři smyčky a končí nad hladinou vody. Výška toboganu je 7,2 m. Jaké rychlosti by dosáhl na toboganu nezodpovědný sportovec o hmotnosti 60 kg, který pojede na kolečkových bruslích (tedy bez tření)?

Obr. 29 Tobogan

Uvažujme nyní druhou extrémní situaci, a to takovou, že sportovec se bude na toboganu klouzat (bez kolečkových bruslí) a dosáhne pouze nepatrné rychlosti v důsledku působení třecí síly. Jaká je v tomto případě střední třecí síla?

Valivý odpor

Dalším odporem, s nímž se setkáváme např. při pohybu bicyklu, je tzv. *valivý odpor* (dříve se užíval termín valivé tření). Setkáme se s ním např. při pohybu v písku, kdy bicykl za sebou nechává viditelnou stopu. Dobře jsou také vidět stopy od pneumatik automobilu při jízdě např. po polní cestě, když se pneumatiky zaboří do měkké cesty po dešti.



Obr. 30 Valivý odpor

V obou případech je třeba k udržení rovnoměrného pohybu vynaložit sílu, která překonává sílu valivého odporu. Velikost síly valivého odporu F odvodíme z níže uvedených podmínek rovnováhy.

- Tíha tělesa $m\boldsymbol{g}$ je v rovnováze s reakcí podložky $\boldsymbol{F}_n$, tj. $F_n = mg$.
- U skutečných těles však dochází k deformaci podložky a vznikají jiné silové poměry. V důsledku deformace se posune těžiště vzájemného působení a vzniklou silovou dvojici musíme překonávat jinou silovou dvojicí. Potom platí podmínka rovnováhy
$$F \cdot r - F_n \cdot \xi = 0,$$
kde ξ je tzv. *rameno valivého odporu* (nalezneme ho v tabulkách v závislosti na materiálu podložky a válce).
- Aby docházelo vlivem tažné síly $\boldsymbol{F}$ k valení, musí na kolo působit také síla klidového tření $\boldsymbol{F}_{t0}$[1].

[1] Více informací o tomto problému je uvedeno např. v [8].

Na základě výše uvedených vztahů lze psát pro velikost síly valivého odporu vztah

$$F = \frac{mg}{r} \cdot \xi. \tag{7}$$

Příklad 13 – cyklista – 1

Odhadněte velikost síly valivého odporu při jízdě cyklisty o hmotnosti 75 kg (i s bicyklem). Průměr kola s dobře nafouknutou pneumatikou je 58 cm, rameno valivého odporu ξ při jízdě po asfaltové silnici je 3,0 mm. Při řešení uvažujte, že se kolmá tlaková síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{n} = m\boldsymbol{g}$ rozdělí na přední a zadní kolo bicyklu v poměru 1 : 2, tíhové zrychlení $g \doteq 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Řešení

Vzhledem k tomu, že se kolmá tlaková síla $F_\mathrm{n} = 750$ N rozdělí na přední a zadní kolo bicyklu v poměru 1:2, je $F_\mathrm{n1} = 250$ N, $F_\mathrm{n2} = 500$ N. Potom síly valivého odporu mají (po dosazení do (7)) velikosti

$$F_\mathrm{n1} = 0{,}003 \cdot \frac{250}{0{,}58}\ \mathrm{N} = 1{,}3\ \mathrm{N}, \quad F_\mathrm{n2} = 0{,}003 \cdot \frac{500}{0{,}58}\ \mathrm{N} = 2{,}6\ \mathrm{N}.$$

Celkem má tedy síla valivého odporu velikost 3,9 N. I při malé rychlosti $20\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ musí cyklista vůči valivému odporu vynaložit výkon 22 W.

Dříve se používala jízdní kola, tzv. *skládačky*, která se vešla do zavazadlového prostoru osobního automobilu. Průměr kola tohoto bicyklu odhadneme na 45 cm. Podle vztahu (7) se síla valivého odporu zvětšila asi o 30%, což přispěje k pomalejší a namáhavější jízdě na tomto kole.

Cvičení 17 – železniční vagón

Určete sílu valivého odporu působící na kola železničního vagónu o hmotnosti 60 tun, je-li průměr kol vagónu 560 mm, rameno valivého odporu je $\xi = 0{,}5$ mm, tíhové zrychlení $g \doteq 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Odpor prostředí

Při jízdě na bicyklu nebo na lyžích vnímáme při vyšších rychlostech existenci odporu vzduchu, který musí ustoupit pohybujícímu se tělesu. Na základě fyzikálních měření, ale i z praktického pozorování víme, že odporová síla, kterou působí vzduch proti pohybu tělesa, závisí na obsahu S příčného řezu tělesa (zjišťujeme ve směru kolmém k rychlosti), hustotě ϱ prostředí (ve vodě se jde podstatně hůře než ve vzduchu), na velikosti rychlosti v pohybu tělesa vzhledem k prostředí (odpor tedy vzniká nejen při pohybu tělesa vzhledem ke klidnému prostředí, ale např. i pohybem vzduchu vzhledem ke klidnému tělesu). V našem výčtu nesmíme také zapomenout na skutečnost, že velikost odporové síly závisí také na tvaru tělesa, což vyjádříme součinitelem C. Platí vztah

$$F_{\mathrm{o}} = \frac{1}{2} C S \varrho v^2. \tag{8}$$

Velikost síly F, udržující těleso v rovnoměrném pohybu s rychlostí $\boldsymbol{v}$, je pak rovna síle odporové.

Příklad 14 – cyklista – 2

Cyklista o hmotnosti 70 kg (včetně kola) má obsah příčného řezu $S = 0{,}70\ \mathrm{m}^2$, součinitele C odhadneme na 0,65, hustota vzduchu je $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Cyklista jede rychlostí $5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $15\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jak se projeví změny rychlosti na velikosti odporové síly?

Řešení

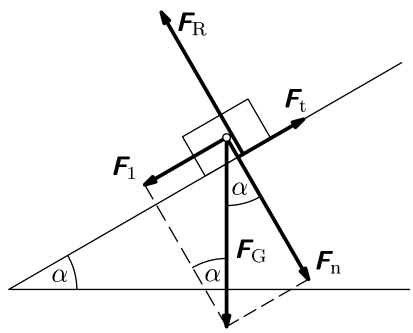
K řešení použijeme vztah (8), kam dosadíme dané hodnoty. Dostaneme

$$F_{\mathrm{o1}} = 6{,}8\ \mathrm{N}, \quad F_{\mathrm{o2}} = 4F_{\mathrm{o1}} = 27{,}3\ \mathrm{N}, \quad F_{\mathrm{o3}} = 9F_{\mathrm{o1}} = 61{,}4\ \mathrm{N}.$$

Zvýší-li se rychlost jízdy cyklisty dvakrát, vzroste velikost odporové síly čtyřikrát, zvýší-li se rychlost jízdy cyklisty třikrát, vzroste velikost odporové síly devětkrát.

6 Pohyb s kopce dolů

V této části se budeme v převážné míře zabývat situacemi, které povedou ve svém důsledku k pohybu na nakloněné rovině. Připomeňme si tedy nejprve, jaké vztahy platí pro pohyb tělesa na nakloněné rovině. Na těleso působí jednak Země tíhovou silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$ ve svislém směru, nakloněná rovina reakční kolmou tlakovou silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ a třecí síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$ ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou.



Obr. 31 Nakloněná rovina

Výslednice $\boldsymbol{F}$ těchto sil, která uděluje tělesu zrychlení $\boldsymbol{a}$ ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou, je vektorovým součtem těchto sil, tj.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}.$$

Dále bychom provedli rozklad sil na složky tak, jak je uvedeno na obr. 31. Dostaneme

$$F_1 = mg\sin\alpha, \quad F_\mathrm{R} = mg\cos\alpha, \quad F_\mathrm{t} = mgf\cos\alpha.$$

Při pohybu po nakloněné rovině směrem dolů je pohybová rovnice dána vztahem

$$ma = mg\sin\alpha - mgf\cos\alpha,$$

z čehož

$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha). \tag{9}$$

Sklon nakloněné roviny je dán vztahem $p = \dfrac{h}{l} = \sin\alpha$, kde h je výška a l je délka nakloněné roviny.

Zajímavý je výsledek pro $a = 0$ – můžeme jet s kopce rovnoměrně?

Příklad 15 – sjezdař

Lyžař o hmotnosti 80 kg (i s lyžemi) jede s kopce o sklonu 0,3 sportovní disciplínu sjezd po trase délky 1800 m. Součinitel smykového tření při jízdě lyží po sněhu je 0,07, $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Stanovte, jakou rychlostí by dojel do cíle lyžař, když nebudeme uvažovat smykové tření a jaké rychlosti dosáhne, když budeme se smykovým třením uvažovat. Za jaké podmínky pro součinitel tření by mohl lyžař jet po větší část trasy rovnoměrným pohybem?

Obr. 32 Sjezdař

Řešení

Nebudeme-li uvažovat třecí sílu, dostaneme užitím zákona zachování mechanické energie $\frac{1}{2}mv_1^2 = mgpl$, kde součin pl vyjadřuje výšku h nakloněné roviny. Po dosazení je $v_1 = 104\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Budeme-li uvažovat třecí sílu, dostaneme užitím zákona zachování energie $\frac{1}{2}mv_2^2 + mgfl\cos\alpha = mgpl$, kde můžeme dosadit za $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-p^2}$ a vyjádřit v_2. Dostaneme $v_2 = \sqrt{2gl(p - f\sqrt{1-p^2})} \doteq 92\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Součinitele smykového tření určíme z podmínky $g\sin\alpha - gf\cos\alpha = 0$, z čehož $f = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}} \doteq 0{,}3$.

V příkladu 15 o lyžaři jsme dospěli k nesmyslnému závěru. Důvodem je skutečnost, že jsme neuvážili, že kromě třecí síly působí na lyžaře odporová síla okolního vzduchu, tj. $F_\mathrm{o} = \frac{1}{2}CS\varrho v^2$. Pokusme se nyní napsat, jaké síly působí na lyžaře:

$$ma = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha - \frac{1}{2}CS\varrho v^2.$$

Pro nás bude zajímavý případ, kdy pravá strana rovnice vyjde rovna nule, tj. výsledná síla působící na lyžaře bude nulová, potom i $ma = 0$. Odtud pak vypočteme tzv. *mezní rychlost* v_m.

Pohyb tedy spočívá v tom, že se lyžař zpočátku na trase při jízdě s kopce zrychluje, ale změny rychlosti jsou nelineární, s rostoucí rychlostí se také zvětšuje odporová síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ a zmenšuje se zrychlení, až zrychlení klesne na nulu a dál se pohybuje lyžař rovnoměrně výše popsanou mezní rychlostí.

Příklad 16 – mezní rychlost sjezdaře

Uvažujme, že na lyžaře z příkladu 15 působí navíc ještě výše odporová síla. Součinitele C odhadneme na $C = 0{,}5$, obsah příčného řezu bude asi $0{,}6\ \mathrm{m}^2$, hustota vzduchu bude $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Určete mezní rychlost tohoto lyžaře.

Řešení

Ze vztahu $0 = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha - \frac{1}{2}CS\varrho v_\mathrm{m}^2$ vyjádříme mezní rychlost pohybu v_m a dosadíme. Dostaneme $v_\mathrm{m} = \sqrt{\dfrac{2mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{CS\varrho}}$. Po úpravě je

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{2mg\left(p - f\sqrt{1-p^2}\right)}{CS\varrho}} \doteq 32\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 116\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

Tento výsledek již podstatně více odpovídá reálné skutečnosti.

Cvičení 18 – mezní rychlost cyklisty

Cyklista o hmotnosti 75 kg (i s bicyklem) jede po silnici s mírným sklonem klesání 12%, $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. a) Určete, jaké rychlosti dosáhne poté, co ujede dráhu 500 m (odpor prostředí neuvažujte), nechá-li kolo jet samovolně po silnici (tj. aniž by šlapal). b) Řešte úlohu a), vezmete-li v úvahu také valivý odpor z příkladu 13. c) Určete mezní rychlost, jaké může cyklista dosáhnout nechá-li kolo jet jen působením tíhové síly (tj. bez vlastního přičinění) po šikmé silnici. Uvažujte, že v tomto případě na cyklistu působí valivý odpor z úlohy b) a odpor vzduchu ($S = 0{,}70\ \mathrm{m}^2$, $C = 0{,}65$, $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$).

Řešení cvičení

1. Změna hybnosti $\Delta p = 8\,100\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$; $F = 270$ N.
2. Impuls síly $F\Delta t = 4000\ \mathrm{N\cdot s}$; odtud $v = 50\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 180\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. V úvahu jsme nevzali odpor prostředí, který již v tomto případě není zanedbatelně malý.
3. Zatěžující síla 600 N se rozloží na plochu 1800 mm^2, tedy tlak je
$$p = \frac{600\ N}{0{,}0018\ \mathrm{m^2}} = 3{,}3\cdot 10^5\ \mathrm{Pa} = 0{,}33\ \mathrm{MPa}.$$
4. Velikost zrychlení puku $a = 24\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, síla $F = ma = 4{,}8$ N.

   Jiné řešení – výsledná změna velikosti hybnosti $\Delta p = 2{,}4\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$, kterou puk získal za dobu $\Delta t = 0{,}5$ s, tedy $F = 4{,}8\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}} = 4{,}8$ N.
5. Hybnost soustavy se nezmění (zachová), tj. $p_1 = 180\,000\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}} = p$, celková hmotnost soustavy je 180 t; potom společná rychlost je $v_\mathrm{s} = 1{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
6. Budeme řešit stejným postupem jako příklad 6. Pokud bychom do vztahů pro u_1 a u_2 z příkladu 6 dosadili $m_2 = m_3 = m$, dostaneme
$$u_1 = 0, \quad u_2 = v_1.$$
   To ale znamená, že jedoucí vagón předá veškerou svou hybnost stojícímu vagónu a sám se po srážce zastaví. Druhý vagón se pak bude pohybovat stejně velkou rychlostí jakou měl první vagón před srážkou.
7. Velikost změny hybnosti střely $\Delta p_1 = 15\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$. Je-li puška volně zavěšená, rychlost zpětného rázu je $3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. V případě, že pušku člověk stojící na ledě silně přitiskne, změna hybnosti střely zůstane stejná, ale celková hmotnost soustavy puška+člověk bude 75 kg a výsledná rychlost $0{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
8. Změna hybnosti $\Delta p_1 = 15\,000\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$ je rovna impulsu síly $F_\mathrm{b}\cdot\Delta t$; odtud doba k zastavení je 6,0 s, dráha je 37,5 m.
9. Změna hybnosti $\Delta p_1 = 18\,000\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$, doba k zastavení 7,2 s, nutná dráha 54 m. I když rychlost je o 20% větší, dráha nutná k zastavení je delší o 44%.
10. Změny hybnosti zůstávají stejné, ale brzdící síla se zmenšila 2,5krát. Proto doby nutné k zastavení jsou 2,5krát větší, tj. 15,0 s a 18,0 s, dráhy nutné k zastavení se také zvětší 2,5krát (protože $s = \dfrac{mv^2}{2F}$), tj. 93,8 m a 135 m.

11. V příkladu 7 jsme dospěli k závěru, že $a_o = R_z\omega^2 = \frac{4\pi^2 R_z}{T^2}$. Jestliže místo $\frac{1}{T^2}$ uvedeme $\frac{1}{(0{,}99T)^2} = 1{,}02\frac{1}{T^2}$, potom by došlo ke změně odstředivého zrychlení o 2% a změna by byla 2% z 0,034 m·s^{-2}, tj. $6{,}8 \cdot 10^{-4}$ m·s^{-2}, což by bylo experimentálně prokazatelné.

12. Tentokrát ve vztahu $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{rg}$ neznáme poloměr r trajektorie. Po vyjádření r z výše uvedené rovnice a dosazení dostaneme $r = \frac{v^2}{g \operatorname{tg}\alpha}$, $r_1 = \frac{144}{10 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}\ \mathrm{m} \doteq 25\ \mathrm{m}$, $r_2 = \frac{144}{10 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ}\ \mathrm{m} \doteq 17{,}2\ \mathrm{m}$. V zatáčce je bezpečnější jízda po vnější dráze.

13. Ze vztahu $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{rg}$ určíme $v = \sqrt{rg \operatorname{tg}\alpha}$.

    Po dosazení $v_1 = \sqrt{300 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 19\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 68{,}4\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $v_2 = \sqrt{500 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 24{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 88\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

14. Určíme velikost setrvačné dostředivé síly $F_\mathrm{A} = m \cdot \frac{v^2}{r_\mathrm{A}} = 1800$ N, $F_\mathrm{B} = m \cdot \frac{v^2}{r_\mathrm{B}} = 2250$ N. V místě A je přetížení $3{,}25g$, na trase AB opustí lyžař stopu a letí dále vzduchem.

15. V klidu – ruce objímají tyč (lano), nohy jsou přitisknuty. Síly při tisku zleva i zprava necháme stejné, $F_1 = F_2$, vzniklé třecí síly $fF_1 = fF_2$. Platí $fF_1 + fF_2 = mg$, potom $F_1 = \frac{mg}{2f}$.

    Pro chlapce $F_1 = 722$ N na laně, rozloží se mezi nohy a ruce.

    Pro dívku $F_1' = 500$ N, opět se rozloží mezi nohy a ruce.

    Při šplhání je nutno přesunout ruce, pak nohy – sevření silami F_1, F_1' při přesunu zůstává v nohách nebo v rukách.

    Pro tyč vycházejí síly $F_1 = 1083$ N, $F_1' = 750$ N.

16. Rychlost při pohybu na kolečkových bruslích $v = \sqrt{2gh} = 12\ \mathrm{ms^{-1}}$. Výpočet třecí síly: délka trasy je $3\pi d = 75{,}4$ m, přesněji $l = \sqrt{75{,}4^2 + 7{,}2^2}$ m $= 75{,}8$ m.

    Dále platí $F_\mathrm{t} \cdot l = mgh \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{t} = 57$ N, $f = 0{,}095$.

17. $F = 4 \cdot \frac{\frac{mg}{4}}{r} \cdot \xi = \frac{mg}{r} \cdot \xi = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 10}{0{,}28} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N} = 1\,071\ \mathrm{N}$.

18. $p = 0{,}12$. a) Ze zákona zachování mechanické energie dostaneme $v_1 = \sqrt{2gpl} \doteq 35\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. b) Ze zákona zachování energie vyplývá, že $v_2 = \sqrt{\dfrac{2mglp - 2Fl}{m}}$, kde $F = \dfrac{mg\sqrt{1-p^2}}{r} \cdot \xi = 7{,}7\ \mathrm{N}$. Po dosazení do vztahu pro v_2 dostaneme $v_2 \doteq 33\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. c) V tomto případě je $a = 0$, tj. $0 = mgp - F - \dfrac{1}{2}CS\varrho v_{\mathrm{m}}^2$, z čehož $v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\dfrac{2(mgp - F)}{CS\varrho}} \doteq 17\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Literatura

[1] Bednařík, M. – Široká, M.: *Fyzika pro gymnázia. Mechanika.* Prometheus, Praha 2000.

[2] Volf, I.: *Fyzika je všude kolem nás.* Knihovnička matematiky a fyziky č. 17, MAFY, Hradec Králové 2001.

[3] Bartuška, K.: *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy I.* Prometheus, Praha 1997.

[4] Prachař, J. – Trnka, J.: *Úlohy z mechaniky I.* Knihovnička FO č. 66, MAFY, Hradec Králové 2004.

[5] Prachař, J. – Trnka, J.: *Úlohy z mechaniky II.* Knihovnička FO č. 72, MAFY, Hradec Králové 2006.

[6] Šedivý, P. – Volf, I.: *Dopravní kinematika a grafy.* Knihovnička FO č. 35, MAFY, Hradec Králové 1998.

[7] Salaba, S. – Matěna, A.: *Mechanika I – statika pro SPŠ strojnické.* SNTL, Praha 1977.

[8] Vybíral, B. – Zdeborová, L.: *Odporové síly.* Knihovnička FO č. 48, MAFY, Hradec Králové 2001.