

upravíme separací proměnných na tvar

$$\frac{dv}{dt} = g - Av^2, \quad \frac{dv}{g - Av^2} = dt. \quad (39)$$

kde $A = \frac{CS\rho}{2m}$ je souhrnná konstanta. Mezní rychlost pohybu je $v_m = \sqrt{\frac{g}{A}}$.

Integrací s použitím rozkladu na parciální zlomky odvodíme zákon rychlosti:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - Av^2} = \frac{1}{A} \int_0^v \frac{dv}{\frac{g}{A} - v^2} = \frac{1}{2\sqrt{Ag}} \left(\int_0^v \frac{dv}{v_m - v} + \int_0^v \frac{dv}{v_m + v} \right) = \int_0^t dt, \quad (40)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{Ag}} \ln \frac{v_m + v}{v_m - v} = t, \quad (41)$$

$$v = v_m \frac{e^{2t\sqrt{Ag}} - 1}{e^{2t\sqrt{Ag}} + 1} = v_m \frac{e^{t\sqrt{Ag}} - e^{-t\sqrt{Ag}}}{e^{t\sqrt{Ag}} + e^{-t\sqrt{Ag}}} = v_m \operatorname{tgh}(t\sqrt{Ag}). \quad (42)$$

Další integrací dostaneme zákon dráhy:

$$s = \int_0^t v dt = \frac{v_m}{\sqrt{Ag}} \ln \frac{e^{t\sqrt{Ag}} + e^{-t\sqrt{Ag}}}{2} = \frac{v_m}{\sqrt{Ag}} \ln \cosh(t\sqrt{Ag}). \quad (43)$$

Pro $t \gg \frac{m}{b}$ můžeme psát:

$$v \doteq v_m = \sqrt{\frac{g}{A}} = \text{konst.}, \quad s \doteq \frac{v_m}{\sqrt{Ag}} \left[\ln \left(e^{t\sqrt{Ag}} \right) - \ln 2 \right] = v_m t - \frac{\ln 2}{A}. \quad (44)$$

Úloha 10. Zkontrolujte počítačový model z příkladu 6 přesným výpočtem podle analytických vztahů.

Výsledky některých úloh

1. 25 m. 3. $3,2 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

4.a 41 N, 516 W. 4.b Úloha vede na kubickou rovnici, kterou asi vyřešíte některou numerickou metodou. $33 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

6. $v = \frac{12\eta}{C\rho r} = 7,1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

POHYBY TĚLESA V ODPORUJÍCÍM PROSTŘEDÍ

Studijní text pro řešitele FO, kat. B

Ivo Volf, Přemysl Šedivý

Úvod

Základní zákon klasické mechaniky, **zákon síly**, který obvykle zapisujeme ve tvaru

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}, \quad (1)$$

umožňuje určit časový průběh pohybu hmotného bodu, známe-li jeho počáteční polohu a rychlost a víme-li, jaká výsledná síla na něj během pohybu působí. V některých jednoduchých případech vystačíme s elementárními znalostmi matematiky. Víte například, že hmotný bod, na který působí stálá síla \mathbf{F} ve směru pohybu, koná *rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb*, při kterém platí

$$a = \frac{F}{m} = \text{konst.}, \quad v = at + v_0, \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (2)$$

Působí-li stálá síla proti směru pohybu, nastává *rovnoměrně zpomalený pohyb* a platí

$$a = \frac{F}{m} = \text{konst.}, \quad v = v_0 - at, \quad s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} at^2. \quad (3)$$

Jednoduchými kinematickými zákony se řídí i *vodorovný vrh v homogenním tíhovém poli ve vakuu*, při kterém na hmotný bod působí pouze stálá tíhová síla, kolmá ke směru počáteční rychlosti:

$$x = v_0 t, \quad y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2, \quad v_x = v_0, \quad v_y = -g t. \quad (4)$$

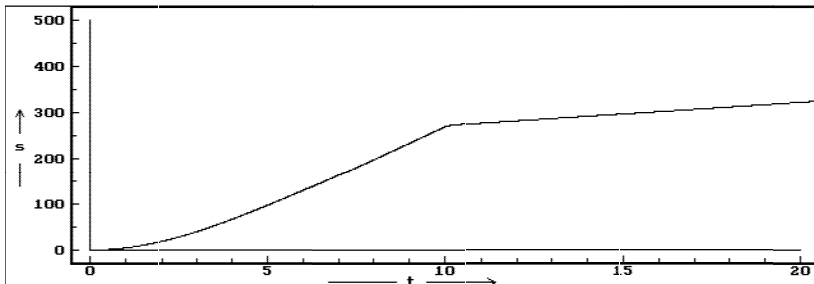
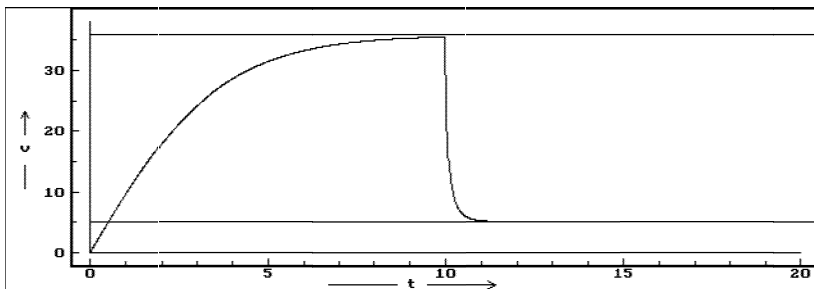
Vedle sil, které vyvolávají pohyby těles, jako je tažná síla motoru automobilu, síla motouzu, kterým táhneme sáňky nebo tíhová síla při volném pádu, působí při reálných pohybech na tělesa i *odporové síly* namířené proti směru okamžité rychlosti. Mezi ně patří především *smykové tření*, jehož velikost můžeme v prvním přiblížení považovat za nezávislou na velikosti okamžité rychlosti, a síly *odporu prostředí* – nejčastěji vzduchu, které naopak jsou na velikosti okamžité rychlosti velmi závislé.

V tomto studijním textu se budeme zabývat řešením úloh o pohybech hmotných bodů, při kterých nemůžeme odporové síly zanedbat. Tyto úlohy se obvykle dají pomocí prostředků středoškolské matematiky řešit jen částečně.

```

Volný pád výsadkáře v klidném vzduchu. Fo = 1/2 C S ro v^2
- - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce - - - - -
m=95      ! hmotnost parašutisty/kg
ro=1.2    ! hustota vzduchu/kg.m^(-3)
g=9.8     ! tíhové zrychlení/m.s^(-2)
dt=.01    ! časový krok/s
S1=1.1    ! plocha parašutisty před otevřením padáku/m^2
C1=1.1    ! součinitel odporu před otevřením padáku
S2=45     ! plocha padáku
C2=1.33   ! součinitel odporu padáku
- - - - - počáteční hodnoty - - - - -
vm1=sqrt(2*m*g/C1/S1/ro) ! mezní rychlost před otevřením p.
vm2=sqrt(2*m*g/C2/S2/ro) ! mezní rychlost po otevření padáku
t=0;v=0;s=0;S=S1;C=C1;   ! počáteční podmínky
DISP      ! zobrazení počáteční polohy
- - - - - model - - - - -
IF t>10 THEN C=C2; S=S2 END ! otevření padáku
a=g-C*S*ro*v^2/2/m
s=s+v*dt+a*dt^2/2
v=v+a*dt
t=t+dt
- - - - - disp - - - - -

```



b) Jak velkou silou bychom museli sánky táhnout při rozjíždění z klidu, aby během 4,0 s dosáhly rychlosti 3,0 m·s⁻¹?

Řešení:

a) $m = 60 \text{ kg}$, $f = 0,03$, $\alpha = 20^\circ$, $v = 2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $F = ?$, $P = ?$

Na sánky působí tíhová síla F_G , reakce silnice R a síla motouzu F (obr. 1). Při rovnoměrném pohybu se vodorovná složka F_1 síly motouzu vzájemně ruší se silou smykového tření F_t . Platí:

$$F_t = f(F_G - F_2) = F_1, \quad f(mg - F \sin \alpha) = F \cos \alpha, \quad (9)$$

$$F = \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha}. \quad (10)$$

Pracujeme s výkonem

$$P = F_1 v = F v \cos \alpha. \quad (11)$$

Pro dané hodnoty: $F = 19 \text{ N}$, $P = 44 \text{ W}$.

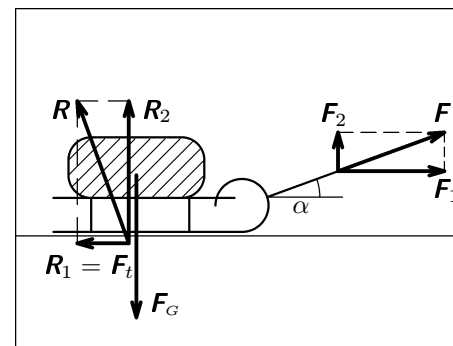
b) $m = 60 \text{ kg}$, $f = 0,03$, $\alpha = 20^\circ$, $v_1 = 3,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $t_1 = 4,0 \text{ s}$; $F = ?$

Při rozjíždění sánek je vodorovná složka síly motouzu větší než smykové tření. Platí:

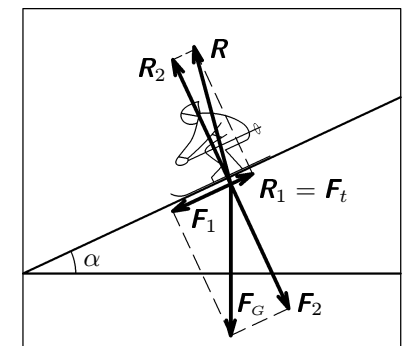
$$ma = F_1 - F_t = F \cos \alpha - f(mg - F \sin \alpha), \quad (12)$$

$$F = \frac{fmg + ma}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = \frac{fmg + m \frac{v_1}{t_1}}{\cos \alpha + f \sin \alpha}. \quad (13)$$

Pro dané hodnoty: $F = 65 \text{ N}$.



Obr. 1



Obr. 2

Pohyb lyžaře s přihlédnutím k odporu vzduchu a smykovému tření

Velikost odporové síly: $F_o = 1/2 C S \rho v^2$

----- proměnné, konstanty, procedury a funkce -----

alfa=10*pi/180 ! úhel nakl. roviny (převedený na radiány)

f=.050 ! součinitel smykového tření

C=.55 ! součinitel odporu

ro=1.2 ! hustota vzduchu/kg.m⁻³

S=.80 ! plošný obsah čelního průřezu/m²

m=85 ! hmotnost lyžaře/kg

g=9.8 ! tíhové zrychlení/m.s⁻²

dt=.4 ! časový krok/s

A=C*S*ro/2/m ! souhrnná konstanta

B=g*(sin(alfa)-f*cos(alfa))

----- počáteční hodnoty -----

t=0;s=0;v=0;a=B ! počáteční podmínky

DISP ! zobrazení počáteční polohy

----- model -----

t=t+dt

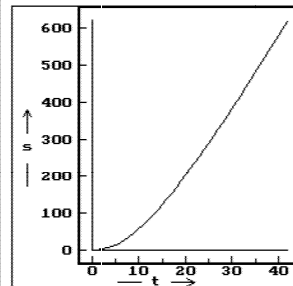
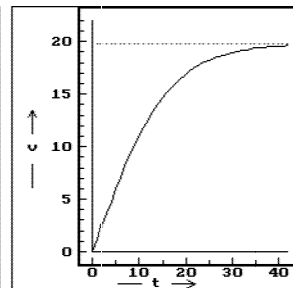
a=B-A*v²

s=s+v*dt+a*dt²/2

v=v+a*dt

----- disp -----

t	a	v	s
0	1.2	0.0	0.0
1	1.2	1.2	0.6
2	1.2	2.4	2.4
3	1.2	3.6	5.5
4	1.2	4.8	9.7
5	1.1	6.0	15.1
6	1.1	7.1	21.6
7	1.1	8.1	29.2
8	1.0	9.1	37.8
9	1.0	10.1	47.5
10	0.9	11.0	58.0
11	0.8	11.9	69.4
12	0.8	12.6	81.7
13	0.7	13.4	94.7
14	0.7	14.0	108.4
15	0.6	14.6	122.7
16	0.6	15.2	137.6
17	0.5	15.7	153.0
18	0.5	16.1	169.0
19	0.4	16.5	185.3
20	0.4	16.9	202.0
21	0.3	17.3	219.1
22	0.3	17.5	236.5
23	0.3	17.8	254.2
24	0.2	18.0	272.1
25	0.2	18.3	290.3
26	0.2	18.4	308.6
27	0.2	18.6	327.1
28	0.1	18.7	345.8
29	0.1	18.9	364.6
30	0.1	19.0	383.6
31	0.1	19.1	402.6
32	0.1	19.2	421.7
33	0.1	19.3	440.9
34	0.1	19.3	460.2
35	0.1	19.4	479.6
36	0.1	19.4	499.0
37	0.0	19.5	518.4
38	0.0	19.5	537.9
39	0.0	19.6	557.5
40	0.0	19.6	577.0
41	0.0	19.6	596.6
42	0.0	19.6	616.3



Volný pád v klidném kapalném nebo plynném prostředí v homogenním tíhovém poli se řídí pohybovou rovnicí

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_o = m\mathbf{g} - V\rho\mathbf{g} - k\mathbf{v} = m\mathbf{g} - m\frac{\rho}{\rho_0}\mathbf{g} - k\mathbf{v}, \quad (17)$$

kde \mathbf{F}_G je tíhová síla, \mathbf{F}_v je hydrostatický nebo aerostatický vztlak, \mathbf{F}_o odporová síla, V objem tělesa, ρ hustota prostředí a ρ_0 hustota tělesa. Pro velikost okamžitého zrychlení dostáváme:

$$a = \frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) - \frac{k}{m}v. \quad (18)$$

Z pohybové rovnice je zřejmé, že s rostoucí rychlostí padajícího tělesa se velikost zrychlení postupně zmenšuje a pohyb se stává rovnoměrným s určitou mezní rychlostí v_m , při které je odporová síla v rovnováze se silou tíhovou a vztlakovou. Platí

$$mg - V\rho g - kv_m = 0, \quad v_m = \frac{V(\rho - \rho_0)g}{k}. \quad (19)$$

Jedná-li se o volný pád pevného tělíska ve vzduchu, můžeme aerodynamický vztlak obvykle zanedbat a pro velikost okamžitého zrychlení dostáváme:

$$a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v. \quad (20)$$

Ani tato na první pohled jednoduchá diferenciální rovnice není řešitelná elementárními prostředky středoškolské matematiky. V článku 4. si ukážeme, jak lze modelovat časový průběh pohybu na osobním počítači jednoduchými numerickými prostředky. Přesné analytické řešení, které poněkud překračuje rámec středoškolské matematiky je pro úplnost uvedeno v závěrečném článku 5.

Příklad 3

Olověný brok o průměru 5 mm padá volně ve vysokém válci naplněném glycerolem. Určete velikost mezní rychlosti broku.

Řešení: $r = 2,5 \cdot 10^{-3}$ m, $\rho = 1260$ kg·m⁻³, $\rho_0 = 11300$ kg·m⁻³, $\eta = 1,48$ Pa·s; $v_m = ?$

Ze vztahů (16) a (19) dostáváme

$$v_m = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_0 - \rho)g}{6\pi r\eta} = \frac{2r^2g(\rho_0 - \rho)}{9\eta}. \quad (21)$$

Příklad 8

Modelujte šikmý vrh míčku na stolní tenis s počáteční výškou 2 m, počáteční rychlostí $30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a elevačním úhlem 60° . Určete délku vrhu a dobu letu.

Řešení: Tentokrát se jedná o rovinný pohyb. Výpočet musíme provádět pro každou souřadnici vektoru zrychlení, vektoru rychlosti a polohového vektoru zvlášť. Proto jsou příslušné řádky zápisu algoritmu výpočtu zdvojeny. Z tabulky a grafu na str. 13 určíme dobu letu 2,5 s a délku vrhu 9,9 m.

Příklad 9

Modelujte pohyb výsadkáře z příkladu 5. Předpokládejte, že seskok byl proveden z vrtulníku, který se vznášel na jednom místě a otevření padáku nastalo po 10 sekundách.

Řešení: Algoritmus výpočtu musí sledovat čas a ve správném okamžiku změnit parametry pohybové rovnice. Výpis programu, tabulka a grafy rychlosti a dráhy jsou na str. 14. Vidíme, že zatímco před otevřením padáku dosažení mezní rychlosti v_{m1} trvalo téměř celých 10 s, po otevření padáku se pohyb zbrzdí během jediné sekundy.

Úloha 7. Upravte program v příkladu 6, aby modeloval volný pád míčku na stolní tenis.

Úloha 8 Modelujte pohyb olověného broku v glycerolu podle příkladu 3.

Úloha 9. Upravte program v příkladu 8, aby porovnával vrh ve vzduchu s vrhem ve vakuu.

Odvodíme je v závěrečném článku 6. Dříve však v článku 4. jednoduše vytvoříme dostatečně přesný počítačový model, kterým můžeme analytické řešení nahradit.

Příklad 4

Jakou mezní rychlost bude mít lyžař z příkladu 2, můžeme-li jej považovat za těleso o hmotnosti $m = 85 \text{ kg}$, jehož příčný řez má plošný obsah $S = 0,8 \text{ m}^2$ a koeficient odporu $C = 0,55$?

Řešení: $\alpha = 10^\circ$, $f = 0,050$, $S = 0,8 \text{ m}^2$, $C = 0,55$; $v_m = ?$

Do pohybové rovnice

$$ma = F_1 - F_t - F_o = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{1}{2}CS\rho v^2 \quad (27)$$

dosadíme $v = v_m$, $a = 0$ a odvodíme:

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{CS\rho}}. \quad (28)$$

Pro dané hodnoty: $v_m = 19,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 72 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Příklad 5

Porovnejte mezní rychlost výsadkáře před otevřením padáku, když letí ve vodorovné poloze s roztaženými rukama a nohama a jeho aerodynamické vlastnosti odpovídají vlastnostem desky o plošném obsahu $S_1 = 1,1 \text{ m}^2$ s koeficientem odporu $C_1 = 1,1$, a po otevření padáku, jehož plošný obsah je $S_2 = 45 \text{ m}^2$ a koeficient odporu je $C_2 = 1,33$. Výsadkář má i s padákem hmotnost $m = 95 \text{ kg}$.

Řešení: $m = 95 \text{ kg}$, $S_1 = 1,1 \text{ m}^2$, $C_1 = 1,1$, $S_2 = 45 \text{ m}^2$, $C_2 = 1,33$;
 $v_{m1} = ?$, $v_{m2} = ?$

Dosažením číselných hodnot do vztahu (20) dostáváme: $v_{m1} = 36 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,
 $v_{m2} = 5,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Úloha 4. Závodník – cyklista, který má i s kolem hmotnost 90 kg, jede za bezvětří po přímé vodorovné silnici rychlostí 45 km/h.

a) Jak velký odpor vzduchu musí překonávat, je-li plošný obsah čelního průřezu $S = 0,8 \text{ m}^2$ a koeficient odporu $C = 0,55$. Jaký je jeho výkon, můžeme-li valivý odpor kol zanedbat?

b) Jak se změní jeho rychlost, pojedí-li se stejným výkonem do kopce se stoupáním 4 m na 100 m dráhy?

Úloha 5. – praktická. Nafoukněte kulatý gumový balonek na průměr asi 20 cm. Průměr balonku změřte a zvažte jej na laboratorních vahách. Uvědomte si, že se přitom uplatní i aerostatický vztlak. Nechte balonek padat z výšky větší než 5 m v klidném vzduchu a pomocí stopek a pásma určete jeho mezní rychlost. (Balonek ji prakticky dosáhne dříve než proletí první metr své dráhy.) Experimentálně zjištěnou hodnotu mezní rychlosti porovnejte s hodnotou vypočtenou podle vztahu (20), kde m je hmotnost závaží, kterým jste vyvážili nafouknutý balonek.

Úloha 6. Kulička o průměru 1 cm padá volně vzduchem teploty 0°C. Při které rychlosti dává vztah (16) pro výpočet odporové síly při laminárním obtékání stejný výsledek jako vztah (23) pro výpočet odporové síly při turbulentním obtékání?

4. Modelování průběhu pohybu v odporujícím prostředí na osobním počítači

Abychom znázornili pohyb hmotného bodu, určíme nejprve jeho rychlost a polohu v časech $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$, které tvoří aritmetickou posloupnost s konstantní diferencí $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. Z vypočtených hodnot buď sestrojíme grafy časových závislostí některých kinematických veličin, nebo v určitém měřítku zobrazíme trajektorii pohybu, na které můžeme vyznačit posloupnost okamžitých poloh hmotného bodu.

Zvolíme-li dostatečně malý časový krok, můžeme v intervalu $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$ považovat výslednou sílu, která na hmotný bod působí, a tedy i jeho zrychlení, za konstantní. Za tohoto předpokladu platí

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_i (\Delta t)^2, \quad (29)$$

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i \Delta t, \quad (30)$$

kde $\mathbf{a}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{r}_i$ jsou zrychlení, rychlost a polohový vektor v čase t_i ,

$\mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+1}$ jsou rychlost a polohový vektor v čase $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Zrychlení \mathbf{a}_i na začátku intervalu určíme z pohybové rovnice.

Naše úvaha vede k postupnému cyklickému výpočtu jednotlivých polohových vektorů a okamžitých rychlostí, který lze snadno naprogramovat pro osobní počítač:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 (\Delta t)^2, & \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 \Delta t, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_1 (\Delta t)^2, & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{a}_1 \Delta t, \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

Modelování pohybů právě popsaným způsobem velmi usnadňuje výpočetní a grafický systém FAMULUS, jehož verze 3.1 je bezplatně dodávána na školy. Ten zjednodušuje práci s přípravou grafů a tabulek a dovoluje uživateli, aby se soustředil na přípravu algoritmu výpočtu vycházejícího z pohybové rovnice. Pomocí systému FAMULUS byly řešeny i následující příklady.

Příklad 6

Modelujte pohyb balonku z úlohy 5. Zjistěte v jaké vzdálenosti od místa uvolnění už můžeme rychlost pádu považovat za konstantní. Pád balonku ve vzduchu porovnejte s volným pádem ve vakuu.

Řešení: Program, jehož výpis je na samostatné stránce spolu s tabulkou vypočítaných hodnot a modelem, vychází z pohybové rovnice volného pádu probíhajícího ve vztažné soustavě se svislou osou y

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{CS\rho v^2}{2m} - g. \quad (31)$$

Počáteční podmínky v čase $t = 0$ jsou: $v_y = 0, y = y_0$. Výpočet, jehož algoritmus je zapsán v části programu označené jako „model“, se cyklicky opakuje. Na konci každého cyklu jsou výsledky výpočtu zaznamenány do tabulky a do grafu. Symbol Δt je ve výpisu programu nahrazen symbolem dt . Výška y_1 tělesa padajícího ve vakuu je dopočítána pomocí analytického vztahu $y_1 = y_0 - gt^2/2$.

Příklad 7

Modelujte pohyb lyžaře z příkladu 4. Z tabulky nebo grafu určete na jaké dráze dosáhne rychlosti 50 km/h. Zjištěnou hodnotu porovnejte s výsledkem řešení příkladu 2.

Řešení: Výpis programu, tabulka a graf jsou opět na samostatné stránce. Zjistujeme, že lyžař dosáhne rychlosti 50 km/h $\doteq 13,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ asi za 14 s po projetí dráhy o málo větší než 100 m, což je asi o čtvrtinu větší hodnota, než ke které jsme došli při řešení příkladu 2.

Pro dané hodnoty: $v_m = 9,2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

Úloha 2. Na základě předcházejícího příkladu navrhnete metodu měření dynamické viskozity kapalin.

Úloha 3. Jak rychle padají k zemi v klidném vzduchu kapičky vodní mlhy o průměru 0,010 mm?

3. Odpor prostředí při turbulentním obtékání tělesa

Při větších rychlostech, kdy se za tělesem tvoří víry, platí pro velikost odporové síly *Newtonův vztah*

$$F_o = \frac{1}{2} C S \rho v^2, \quad (22)$$

kde S je obsah příčného řezu tělesa kolmého ke směru rychlosti, ρ je hustota tekutiny, v je velikost rychlosti tělesa vzhledem k tekutině a C je součinitel odporu, který závisí na tvaru tělesa. Pro dutou polokouli, jejíž dutina je natočena ve směru pohybu tělesa má hodnotu $C = 1,33$, pro kruhovou desku kolmou ke směru rychlosti $C = 1,12$, pro kouli $C = 0,48$. Vztah někdy potřebujeme znát ve vektorovém tvaru:

$$\mathbf{F}_o = -\frac{1}{2} C S \rho v \mathbf{v}. \quad (23)$$

Pohyb tělesa v klidném vzduchu v homogenním tíhovém poli se při zanedbatelném aerodynamickém vztlaku řídí pohybovou rovnicí

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_o = m \mathbf{g} - \frac{1}{2} C S \rho v \mathbf{v}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{g} - \frac{C S \rho v}{2m} \mathbf{v}. \quad (24)$$

Po dosažení mezní rychlosti se síly \mathbf{F}_G a \mathbf{F}_o navzájem ruší. Z toho odvodíme:

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg}{C S \rho}}. \quad (25)$$

Velikost okamžitého zrychlení při volném pádu je

$$a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{C S \rho v^2}{2m}. \quad (26)$$

Řešením této diferenciální rovnice, které ovšem překračuje rámec středoškolské fyziky, lze získat analytické vztahy popisující časový průběh volného pádu.

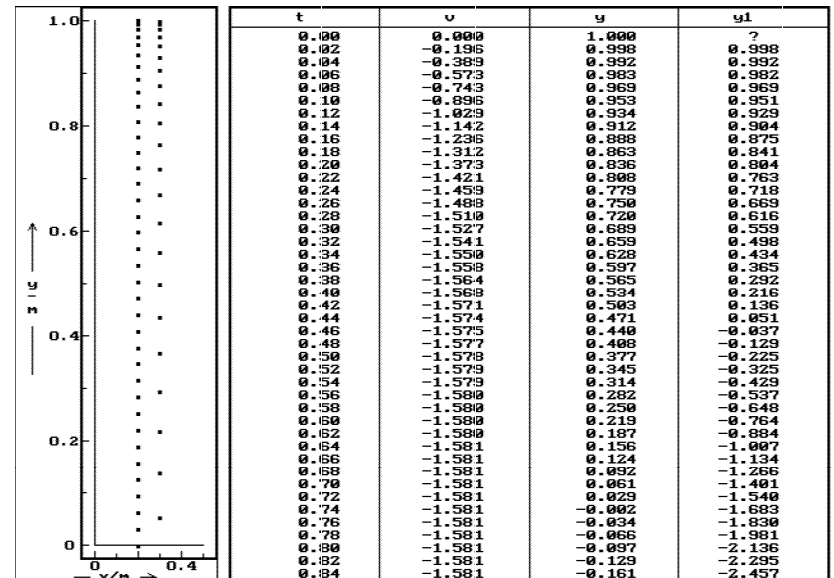
Volný pád koule v odporujícím prostředí při vírovém obtékání.

Velikost odporové síly: $F_o = 1/2 C S \rho v^2$

```

- - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce - - - - -
C=.48                ! součinitel odporu
ro=1.3               ! hustota vzduchu/kg.m^(-3)
R=.10                ! poloměr koule/m
m=.0025              ! hmotnost koule/kg
g=9.8                ! tíhové zrychlení/m.s^(-2)
dt=.02               ! časový krok/s
y0=1                 ! počáteční výška/m
A=C*pi*R*R*ro/2/m   ! souhrnná konstanta
- - - - - počáteční hodnoty - - - - -
t=0;y=y0;v=0;       ! počáteční podmínky
x=.2;x1=.3           ! pomocné souřadnice
DISP                 ! zobrazení počáteční polohy
- - - - - model - - - - -
t=t+dt               ! a,v jsou y_ové souřadnice
a=A*v^2-g            ! rychlosti a zrychlení
y=y+v*dt+a*dt^2/2;  y1=y0-g*t^2/2
v=v+a*dt
- - - - - disp - - - - -

```



Příklad 2

Lyžař sjíždí po svahu se sklonem 10° ; součinitel smykového tření mezi lyžemi a sněhem je 0,050. Na jaké dráze by dosáhl rychlosti 50 km/h, kdyby na něj nepůsobil odpor vzduchu?

Řešení: $\alpha = 10^\circ$, $f = 0,050$, $v = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \doteq 13,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $s = ?$

Na lyžaře působí tíhová síla F_G a reakce svahu R (obr.2). Pohyb lyžaře je vyvolán pohybovou složkou tíhové síly F_1 , jejíž účinek zmenšuje smykové tření F_t (obr. 2). Platí

$$a = \frac{F_1 - F_t}{m} = \frac{mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha}{m} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad (14)$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2}{2a}. \quad (15)$$

Pro dané hodnoty: $a = 1,22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $s = 79 \text{ m}$.

Tato úloha představuje značné zjednodušení děje, který probíhá na lyžařském svahu. Za daných předpokladů by lyžař mohl na dostatečně dlouhém svahu dosáhnout libovolné, třeba i nadzvukové rychlosti. Ze zkušenosti však víme, že ve skutečnosti odpor vzduchu při větších rychlostech lyžaře značně brzdí a jeho rychlost na daném svahu nemůže překročit určitou maximální hodnotu.

Úloha 1. Hokejový puk vystřelený po ledě opustil hokejku rychlostí $15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a do mantinelu ve vzdálenosti 20 m narazil rychlostí $12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Od mantinelu se odrazil rychlostí $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Na jaké další dráze se zastavil?

2. Odpor prostředí při laminárním obtékání tělesa

S laminárním obtékáním tělesa tekutinou se prakticky setkáváme jen při velmi pomalých pohybech malých tělísek. Velikost odporové síly je přímo úměrná rychlosti tělesa $F_o = kv$; Konstanta úměrnosti závisí na tvaru a velikosti tělesa a na veličině η , která charakterizuje kapalinu nebo plyn a nazývá se *dynamická viskozita*. Pro laminární obtékání koule o poloměru r platí *Stokesův* vzorec

$$F_o = 6\pi r \eta v. \quad (16)$$

Podle MFCh tabulek je při 20°C

dynamická viskozita vody $1,00 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, glycerolu $1,48 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Dynamická viskozita vzduchu při teplotě 0°C je $17,1 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

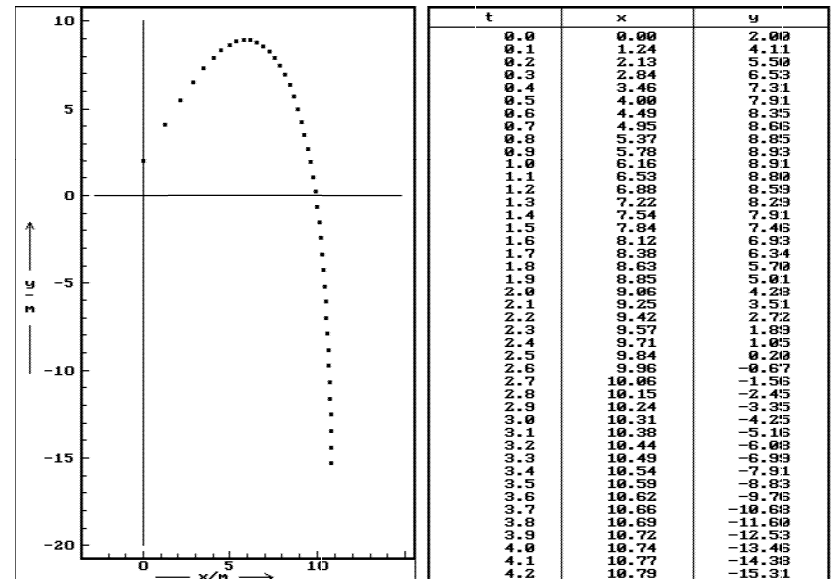
Šikmý vrh koule v odporujícím prostředí při vírovém obtékání.

Velikost odporové síly: $F_o = 1/2 C \rho v^2$

```

- - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce - - - - -
C=.45          ! součinitel odporu
ro=1.2         ! hustota vzduchu/kg.m^(-3)
R=.019         ! poloměr koule/m
m=.0027        ! hmotnost koule/kg
g=9.8          ! tíhové zrychlení/m.s^(-2)
v=30           ! velikost počáteční rychlosti/m.s^(-1)
e=60*pi/180    ! elevační úhel (stupně převedeny na radiány)
dt=.1          ! časový krok/s
A=C*pi*R*R*ro/2/m ! souhrnná konstanta
- - - - - počáteční hodnoty - - - - -
t=0;x=0;y=2;vx=v*cos(e);vy=v*sin(e) ! počáteční podmínky
DISP          ! zobrazení počáteční polohy
- - - - - model - - - - -
t=t+dt
ax=-A*sqrt(vx^2+vy^2)*vx; ay=-A*sqrt(vx^2+vy^2)*vy-g
x=x+vx*dt+ax*dt^2/2; y=y+vy*dt+ay*dt^2/2
vx=vx+dt*ax; vy=vy+dt*ay
- - - - - disp - - - - -

```



Všude, kde nebudeme umět nalézt analytický popis časového průběhu pohybu, využijeme možnosti jednoduchého a dostatečně přesného počítačového modelování.

Ve všech úlohách počítáme s tíhovým zrychlením $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$ a s hustotou vzduchu $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

1. Pohyby brzděné pouze smykovým třením

Velikost třecí síly F_t při smykovém tření určíme pomocí vztahu

$$F_t = f F_n, \quad (5)$$

kde F_n je velikost normálové síly, která přitlačuje pohybující se těleso k podložce a f je součinitel smykového tření. Pokud se při pohybu tělesa uplatní pouze stálá „hybná síla“ \mathbf{F} ve směru pohybu a smykové tření, vycházíme z *pohybové rovnice*

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = m\mathbf{a}. \quad (6)$$

Mohou nastat tři případy:

- a) $F > F_t$. V tomto případě probíhá pohyb rovnoměrně zrychlený, při kterém

$$a = \frac{F - F_t}{m}. \quad (7)$$

- b) $F = F_t$. Pohyb je rovnoměrný.

- c) $F < F_t$. Pohyb je rovnoměrně zpomalený. Zrychlení je namířeno proti směru okamžité rychlosti a má velikost

$$a = \frac{F_t - F}{m}. \quad (8)$$

Příklad 1

Sáňky i s nákladem mají hmotnost 60 kg; součinitel smykového tření mezi skluznicí a sněhem je 0,030.

- a) Jak velkou tahovou silou musíme působit na motouz sáňek, abychom je udrželi v rovnoměrném pohybu rychlostí $2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ po vodorovné silnici? S jakým výkonem pracujeme? Motouz je odchýlen od vodorovného směru o 20° (obr. 1).

5. Analytické vztahy popisující časový průběh volného pádu v odporujícím prostředí

A. Laminární obtékání

Vyjdeme z pohybové rovnice

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = F_G - F_o = mg - bv, \quad a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v. \quad (32)$$

Separací proměnných dojdeme k diferenciální rovnici:

$$\frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = dt. \quad (33)$$

Při nulové počáteční rychlosti dostaneme integrací zákon rychlosti:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = \int_0^t dt, \quad (34)$$

$$\ln \left(g - \frac{b}{m}v \right) - \ln g = -\frac{b}{m}t, \quad v = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right). \quad (35)$$

Další integrací dostaneme zákon dráhy:

$$s = \int_0^t v dt = \frac{mg}{b} \left(t + \frac{e^{-\frac{b}{m}t} - 1}{\frac{b}{m}} \right). \quad (36)$$

Pro $t \gg \frac{m}{b}$ můžeme psát:

$$v \doteq \frac{mg}{b} = v_m = \text{konst.}, \quad s = \frac{mg}{b} \left(t - \frac{m^2 g}{b^2} \right) = v_m \left(t - \frac{v_m}{g} \right). \quad (37)$$

B. Turbulentní obtékání

Pohybovou rovnici

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = F_G - F_o = mg - \frac{1}{2} C S \rho v^2, \quad a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{C S \rho}{2m} v^2 \quad (38)$$