

# OBVODY STŘÍDAVÉHO PROUDU S LINEÁRNÍMI JEDNOBRANY A DVOJBRANY

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

*Přemysl Šedivý*

## Obsah

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1    | Jednoduchý obvod střídavého proudu. Řešení obvodů střídavého proudu pomocí fázorového diagramu   | 2  |
| 2    | Užití komplexních veličin při řešení obvodů střídavého proudu – symbolická metoda                | 8  |
| 3    | Lineární jednobrany. Impedance, admitance  | 10 |
| 4    | Impedance v jednoduchém obvodu střídavého proudu   | 11 |
| 5    | Spojování jednobranů   | 12 |
| 6    | Frekvenční charakteristiky lineárních impedančních jednobranů                                    | 17 |
| 7    | Jednoduché rezonanční jednobrany   | 22 |
| 8    | Univerzální frekvenční charakteristiky rezonančních jednobranů. Šířka pásma                      | 28 |
| 9    | Lineární dvojbrany. Napěťový přenos  | 32 |
| 10   | Náměty laboratorních prací   | 40 |
| 10.1 | Měření indukčnosti a rezistance cívky metodou tří voltmetrů . . . . .                            | 40 |
| 10.2 | Frekvenční charakteristiky indukčnosti a rezistance cívky . . . . .                              | 42 |
| 10.3 | Určení frekvenčních charakteristik sériového jednobranu CR a nezatíženého dvojbranu CR . . . . . | 43 |
| 10.4 | Určení frekvenčních charakteristik Wienova členu . . . . .                                       | 45 |
|      | Výsledky úloh  | 47 |

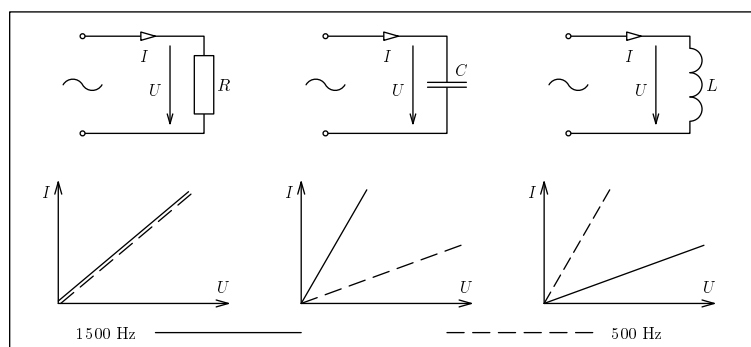
# 1 Jednoduchý obvod střídavého proudu. Řešení obvodů střídavého proudu pomocí fázorového diagramu

V tomto textu se budeme zabývat elektrickými obvody sestavenými z ideálních rezistorů, kondenzátorů a cívek připojenými k ideálním zdrojům harmonického střídavého napětí. Takovéto zidealizované obvody mohou velmi dobře modelovat reálné obvody v nejrůznějších elektrotechnických zařízeních.

Rezistory, kondenzátory a cívky jsou **lineární součástky**. Amplituda  $I_m$  střídavého proudu procházejícího součástkou je přímo úměrná amplitudě  $U_m$  střídavého napětí. Totéž platí o *efektivních hodnotách* proudu a napětí

$$I = I_m/\sqrt{2}, \quad U = U_m/\sqrt{2},$$

které budeme ve výpočtech používat častěji. *Voltampérová charakteristika* rezistoru nezávisí na frekvenci proudu. U kondenzátoru se s rostoucí frekvencí sklon charakteristiky zvětšuje a u cívky se naopak zmenšuje (obr. 1-1).



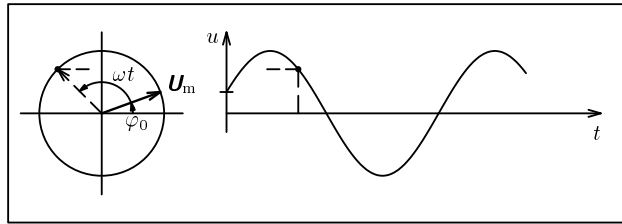
Obr. 1-1

**Fázor** (*časový vektor*)  $\mathbf{U}_m$  harmonicky kmitajícího napětí určuje svou velikostí amplitudu kmitů  $U_m$  a svým směrem jejich počáteční fázi  $\varphi_0$  (obr. 1-2). Začne-li se v čase  $t = 0$  fázor napětí otáčet v kladném smyslu úhlovou rychlostí  $\omega$ , bude svíslá souřadnice fázoru rovna *okamžitě hodnotě napětí*

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Stejným způsobem definujeme *fázor proudu*  $\mathbf{I}_m$ .

**Fázorové diagramy** jsou vhodné pro řešení jednodušších obvodů. Zopakujme si nejprve, jak vypadají fázorové diagramy jednoduchých obvodů střídavého proudu s rezistorem, kondenzátorem a cívkou.

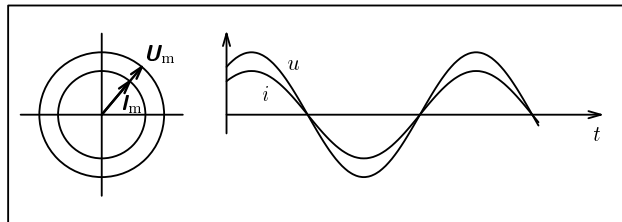


Obr. 1-2

V obvodu s ideálním rezistorem je vztah mezi napětím a proudem vyjádřen Ohmovým zákonem

$$\frac{u}{i} = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = R = \text{konst.}$$

Fázor napětí a fázor proudu mají stejný směr (obr. 1-2). Veličinu  $R$  nazýváme **rezistance**. Neliší se od stejnosměrného odporu rezistoru.



Obr. 1-3

V obvodu s ideálním kondenzátorem je okamžitý náboj na deskách kondenzátoru přímo úměrný okamžitému napětí

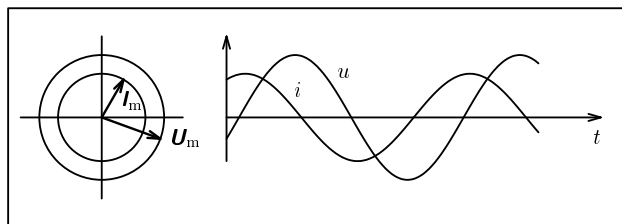
$$q = C u$$

a okamžitý proud určíme ze vztahu

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}.$$

Jestliže okamžitá hodnota napětí je  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ , pak

$$i = \omega C U_m \cos(\omega t + \varphi_0) = I_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$



Obr. 1-4

Veličina

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C} = X_C$$

je **kapacitní reaktance** (kapacitance) kondenzátoru. V obvodu s kondenzátorem předbíhá proud před napětím o čtvrtinu periody, fázově o  $\pi/2$ . Fázory obou veličin jsou navzájem kolmé (obr. 1-4).

V obvodu s ideální cívkou platí zákon elektromagnetické indukce ve tvaru

$$u_L = L \frac{di}{dt}.$$

Jestliže okamžitá hodnota proudu je

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_0),$$

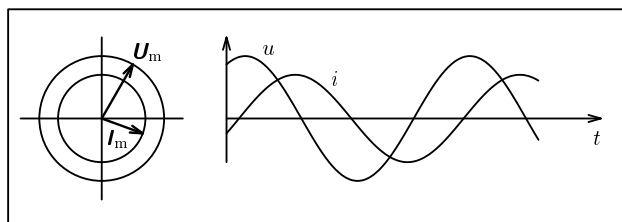
pak

$$u = \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi_0) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Veličina

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \omega L = X_L$$

je **induktivní reaktance** (induktance) cívky. V obvodu s cívkou je proud opožděn za napětím o čtvrtinu periody, fázově o  $\pi/2$ . Fázory obou veličin jsou navzájem kolmé (obr. 1-5).



Obr. 1-5

**Fázové posunutí** mezi napětím a proudem definujeme vztahem

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I.$$

U cívky, kde napětí předbíhá před proudem, je kladné; u kondenzátoru je záporné.

*V praktických situacích známe častěji efektivní hodnoty střídavých napětí a proudů než jejich amplitudy. Proto i ve fázorových diagramech střídavých obvodů místo fázorů  $\mathbf{U}_m$ ,  $\mathbf{I}_m$  používáme fázory  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{I}$  o velikostech rovných efektivním hodnotám  $U$ ,  $I$ .*

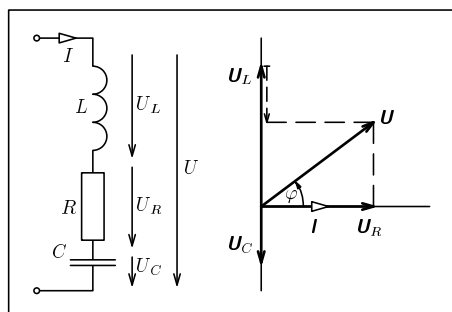
**V sériově zapojeném obvodu je fázor proudu pro všechny součástky společný.** Obvykle jej umísťujeme do základní polohy na vodorovné ose a počáteční fázi proudu tedy volíme nulovou. **Fázor výsledného napětí je vektorovým součtem**

**fázorů napětí na jednotlivých součástkách.** Na obr. 1-6 je schéma a fázorový diagram sériového obvodu  $LRC$ . Fázor proudu, který je společný pro všechny součástky, volíme v základní poloze ( $\varphi_0 = 0$ ). Z diagramu snadno odvodíme vztahy pro výpočet výsledného napětí a fázového posunutí mezi napětím a proudem:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_R + \mathbf{U}_L + \mathbf{U}_C,$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{I \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{IR} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$



Obr. 1-6

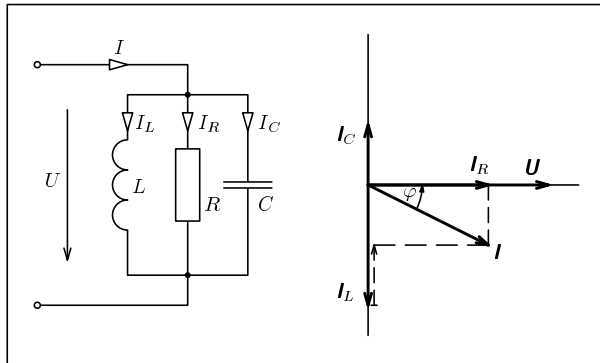
**V paralelně zapojeném obvodu je pro všechny součástky společný fázor napětí** a obvykle jej umísťujeme do základní polohy na vodorovné ose. **Fázor výsledného proudu je vektorovým součtem fázorů proudů procházejících jednotlivými součástkami.** Na obr. 1-7 je schéma a fázorový diagram paralelního obvodu  $LRC$ . Z něj odvodíme vztahy pro výpočet výsledného proudu a fázového posunutí mezi napětím a proudem:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C,$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = \frac{U \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)}{\frac{U}{R}} = R \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right).$$

Všimněte si, že fázové posunutí je kladné, když  $I_L > I_C$ .



Obr. 1-7

### Příklad 1

Kondenzátor o kapacitě  $32 \mu\text{F}$  a cívka byly sériově připojeny k síťovému transformátoru ( $f = 50 \text{ Hz}$ ). Vlastnosti kondenzátoru se přibližují vlastnostem kondenzátoru ideálního. Cívku si můžeme představit jako sériové spojení ideální cívky o indukčnosti  $L_s$  a ideálního rezistoru o rezistanci  $R_s$ . Voltmetrem byla v obvodu změřena napětí  $U = 10,5 \text{ V}$ ,  $U_C = 18,0 \text{ V}$ ,  $U_{LR} = 14,5 \text{ V}$  (obr. 1-8).

Narýsujte fázorový diagram obvodu a určete veličiny  $L_s$  a  $R_s$ .

### Řešení

Fázorový diagram obvodu je na obr. 1-8. Fázor proudu  $I$  volíme v základní poloze — tím je dána i poloha fázoru  $U_C$ . Zbývající fázory dostaneme doplněním obrazce na trojúhelník a na rovnoběžník. Velikosti fázorů vynásíme v efektivních hodnotách — velikosti fázorů se tím zmenší  $\sqrt{2}$  krát. Z fázorového diagramu určíme úhel  $\varphi$ , který svírá fázor napětí  $U_{LR}$  s fázorem proudu  $I$ :

$$U^2 = U_C^2 + U_{LR}^2 - 2U_C U_{LR} \cos \psi = U_C^2 + U_{LR}^2 - 2U_C U_{LR} \sin \varphi,$$

$$\sin \varphi = \frac{U_C^2 + U_{LR}^2 - U^2}{2U_C U_{LR}}.$$

Obvodem prochází proud

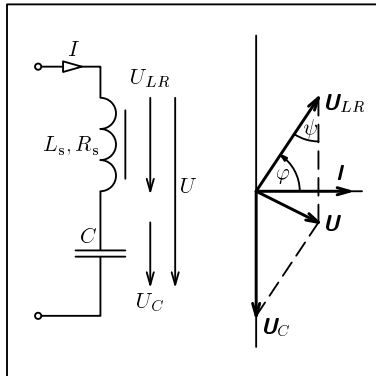
$$I = \frac{U_C}{X_C} = \omega C U_C.$$

Z fázorového diagramu samotné cívky (obr. 1-9) odvodíme

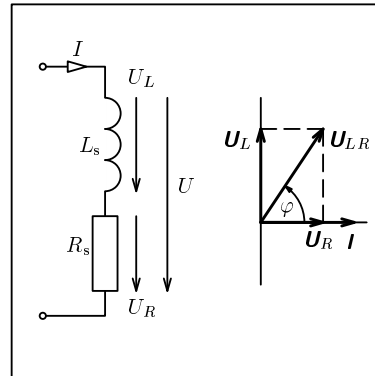
$$U_R = U_{LR} \cos \varphi, \quad U_L = U_{LR} \sin \varphi,$$

$$R_s = \frac{U_R}{I}, \quad L_s = \frac{U_L}{\omega I}.$$

Numericky:  $\varphi = 54,3^\circ$ ,  $I = 0,181 \text{ A}$ ,  $R_s = 47 \Omega$ ,  $L_s = 0,21 \text{ H}$ .



Obr. 1-8



Obr.1-9

### Úlohy

1. Žárovku s jmenovitými hodnotami napětí a proudu  $U_{jm} = 6,3 \text{ V}$ ,  $I_{jm} = 0,10 \text{ A}$  chceme napájet ze síťového transformátoru, jehož sekundární vinutí má efektivní hodnotu napětí  $12 \text{ V}$ . Jak velkou kapacitu musí mít sériově připojený kondenzátor, aby byly dodrženy jmenovité hodnoty? Jak velké napětí na kondenzátoru naměříme? Jaké bude fázové posunutí mezi celkovým napětím a proudem?

2. Kondenzátor o kapacitě  $1,0 \mu\text{F}$  a rezistor o odporu  $1 \text{ k}\Omega$  jsou paralelně připojeni k tónovému generátoru o frekvenci  $1,0 \text{ kHz}$ . Celkový proud v obvodu je  $4,0 \text{ mA}$ . Jaké proudy procházejí oběma součástkami? Jaké je svorkové napětí generátoru? Jaké je fázové posunutí mezi celkovým napětím a proudem?

## 2 Užití komplexních veličin při řešení obvodů střídavého proudu – symbolická metoda

Symbolickou metodu používáme při řešení složitějších obvodů. Fázory napětí a proudu považujeme za komplexní veličiny zobrazené v *Gaussově rovině*. Také vztahy mezi jednotlivými fázory v obvodu vyjadřujeme pomocí komplexních veličin. S komplexními veličinami počítáme stejně jako s komplexními čísly v matematice. Z praktických důvodů je však forma zápisu poněkud odlišná.

Komplexní veličiny budeme zapisovat v *algebraickém*, *goniometrickém* nebo *exponenciálním* tvaru:

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re}\mathbf{A} + j \cdot \operatorname{Im}\mathbf{A} = A(\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = Ae^{j\varphi},$$

|     |   |                         |
|-----|---|-------------------------|
| kde | $\operatorname{Re}\mathbf{A} = A \cos \varphi$  | je reálná složka,       |
|     | $\operatorname{Im}\mathbf{A} = A \sin \varphi$  | je imaginární složka,   |
|     | $j = \sqrt{-1}$   | je imaginární jednotka, |
|     | $A =  \mathbf{A}  = \sqrt{\operatorname{Re}^2\mathbf{A} + \operatorname{Im}^2\mathbf{A}}$ | je absolutní hodnota,   |
|     | $\varphi$   | je argument.            |

V psaném textu použijeme pro komplexní veličinu  $\mathbf{A}$  symbol  $\vec{A}$  podobně jako u jiných vektorů.

Komplexní veličina má kromě absolutní hodnoty a argumentu i *fyzikální jednotku*.

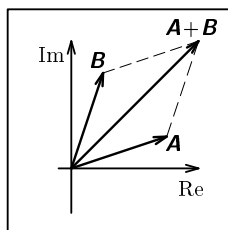
Dvě komplexní veličiny  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  jsou si rovny právě tehdy, když

$$\operatorname{Re}\mathbf{A} = \operatorname{Re}\mathbf{B}, \quad \operatorname{Im}\mathbf{A} = \operatorname{Im}\mathbf{B}.$$

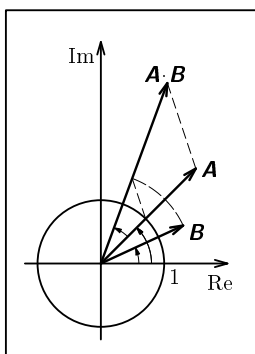
Součet dvou komplexních veličin  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  téhož druhu je definován vztahem

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \operatorname{Re}\mathbf{A} + \operatorname{Re}\mathbf{B} + j(\operatorname{Im}\mathbf{A} + \operatorname{Im}\mathbf{B}),$$

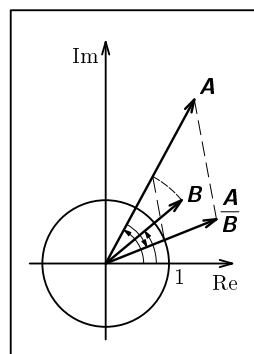
kterému odpovídá vektorový součet v Gaussově rovině (obr. 2-1).



Obr. 2-1



Obr. 2-2, Obr. 2-3





Součin dvou komplexních veličin  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  je definován vztahem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \operatorname{Re}\mathbf{A} \cdot \operatorname{Re}\mathbf{B} - \operatorname{Im}\mathbf{A} \cdot \operatorname{Im}\mathbf{B} + j(\operatorname{Re}\mathbf{A} \cdot \operatorname{Im}\mathbf{B} + \operatorname{Im}\mathbf{A} \cdot \operatorname{Re}\mathbf{B}).$$

**Absolutní hodnota součinu je rovna součinu absolutních hodnot obou činitelů a argument součinu je součtem argumentů** (obr. 2-2)

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = A \cdot B, \quad \varphi_{AB} = \varphi_A + \varphi_B.$$

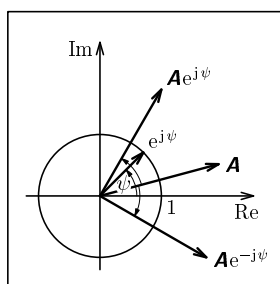
Podíl dvou komplexních veličin  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  upravujeme obvykle na tvar

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*} = \frac{(\operatorname{Re}\mathbf{A} + j \cdot \operatorname{Im}\mathbf{A})(\operatorname{Re}\mathbf{B} - j \cdot \operatorname{Im}\mathbf{B})}{(\operatorname{Re}\mathbf{B})^2 + (\operatorname{Im}\mathbf{B})^2},$$

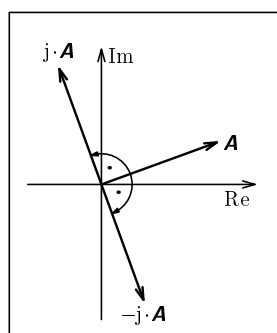
kde  $\mathbf{B}^* = \operatorname{Re}\mathbf{B} - j \cdot \operatorname{Im}\mathbf{B}$  je veličina komplexně sdružená k veličině  $\mathbf{B}$ .

**Absolutní hodnota podílu je rovna podílu absolutních hodnot obou veličin a argument podílu je roven rozdílu obou argumentů** (obr. 2-3)

$$\left| \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} \right| = \frac{A}{B}, \quad \varphi_{A/B} = \varphi_A - \varphi_B.$$



Obr. 2-4



Obr. 2-5

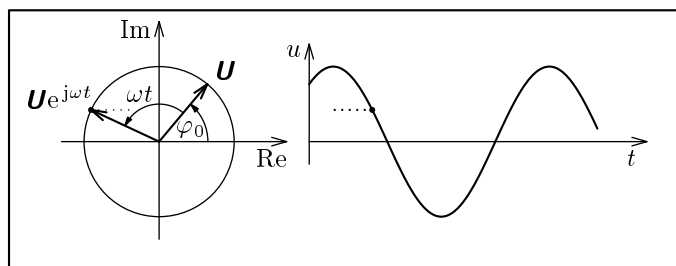
Vynásobíme-li komplexní veličinu komplexní jednotkou

$$e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi,$$

otočí se její obraz v Gaussově rovině o úhel  $\psi$ . Absolutní hodnota veličiny se přitom nezmění. Vydělíme-li komplexní veličinu komplexní jednotkou  $e^{j\psi}$  (což je totéž, jako když ji vynásobíme komplexní jednotkou  $e^{-j\psi}$ ), otočí se její obraz v Gaussově rovině o úhel  $-\psi$  (obr. 2-4). Otočení o  $\pi/2$  dosáhneme vynásobením komplexní veličiny komplexní jednotkou  $j = \cos(\pi/2) + j \sin(\pi/2)$ . Podobně otočení o  $-\pi/2$  dosáhneme vynásobením komplexní jednotkou  $-j = \cos(\pi/2) - j \sin(\pi/2)$  (obr. 2-5).

Také otáčení fázoru napětí nebo proudu v závislosti na čase můžeme vyjádřit pomocí násobení komplexní jednotkou (obr 2-6). Poloha fázoru napětí v čase  $t$  je určena komplexní veličinou

$$\mathbf{U} \cdot e^{j\omega t} = U_m \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t} = U_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi_0)}.$$



Obr. 2-6

### 3 Lineární jednobrany. Impedance, admittance

**Jednobran** je do obvodu připojen pomocí jediné dvojice svorek (obr. 3-1). Může být tvořen jedinou součástí, nebo větším počtem součástí různě propojených.

Jednobrany sestavené z rezistorů, kondenzátorů a cívek mají při konstantní frekvenci střídavého proudu **lineární voltampérovou charakteristiku** — celkový proud  $I$  je přímo úměrný celkovému napětí  $U$ . Jednobran složený pouze z rezistorů (*odporový jednobran*) se v obvodu chová jako jediný rezistor. Celkový proud je ve fázi s celkovým napětím a voltampérová charakteristika nezávisí na frekvenci. Jestliže se však v jednobranu vyskytnou kondenzátory nebo cívky, dochází zpravidla mezi celkovým proudem a celkovým napětím k fázovému posunutí, jehož velikost závisí na frekvenci, a voltampérová charakteristika má pro různé frekvence různý sklon.

Použijeme-li pro popis obvodu s lineárním jednobranem symbolickou metodu, **považujeme fázory napětí a proudu  $U, I$  za komplexní veličiny zobrazené v Gaussově rovině**. Poměr těchto veličin se nazývá **impedance** jednobranu:

$$Z = \frac{U}{I}.$$

Při stálé frekvenci střídavého proudu je impedance lineárního jednobranu konstantní a zcela vyjadřuje jeho vlastnosti. **Absolutní hodnotu** a **argument** impedance určíme pomocí vztahů

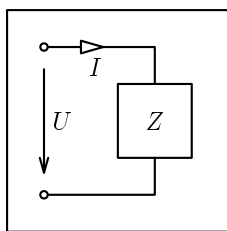
$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}, \quad \varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I.$$

Řešení některých úloh se zjednoduší zavedením veličiny převrácené k impedanci, která

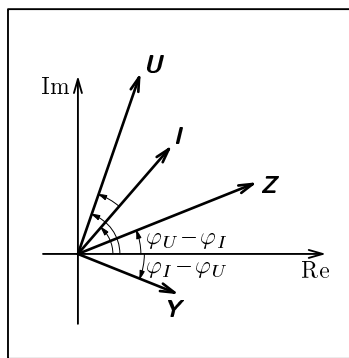
se nazývá **admitance**

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{U}}, \quad Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U} = \frac{I_m}{U_m}, \quad \varphi_Y = -\varphi_Z = \varphi_I - \varphi_U.$$

Vztah mezi fázemi fázorů  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{I}$  a argumenty veličin  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$  znázorňuje obr. 3-2.



Obr. 3-1



Obr. 3-2

## 4 Impedance v jednoduchém obvodu střídavého proudu

Základní poznatky o jednoduchých obvodech střídavého proudu, které jsme zopakovali v kap. 1, můžeme vyjádřit také takto:

**V obvodu s rezistorem** platí

$$Z = \frac{U}{I} = R, \quad \varphi_U = \varphi_I, \quad \varphi_Z = 0, \quad \mathbf{Z} = R(\cos 0 + j \sin 0) = R, \quad \mathbf{Y} = \frac{1}{R}.$$

**V obvodu s kondenzátorem** je fázor napětí opožděn o  $\pi/2$  za fázorem proudu. Platí

$$Z = \frac{U}{I} = X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I = -\frac{\pi}{2},$$

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\omega C} \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C} \quad \mathbf{Y} = j\omega C.$$

**V obvodu s cívku** předbíhá fázor napětí o  $\pi/2$  před fázorem proudu. Platí

$$Z = \frac{U}{I} = X_L = \omega L, \quad \varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I = \frac{\pi}{2},$$

$$\mathbf{Z} = \omega L \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = j\omega L, \quad \mathbf{Y} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{\omega L}.$$

## 5 Spojování jednobranů

Při sériovém spojení několika jednobranů (obr. 5-1) je fázor proudu  $I$  společný pro všechny jednobrany a fázor celkového napětí je vektorovým součtem jednotlivých fázorů napětí:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \dots + \mathbf{U}_N .$$

Celková impedance obvodu je

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{I} = \frac{\mathbf{U}_1}{I} + \frac{\mathbf{U}_2}{I} + \dots + \frac{\mathbf{U}_N}{I} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots + \mathbf{Z}_N .$$

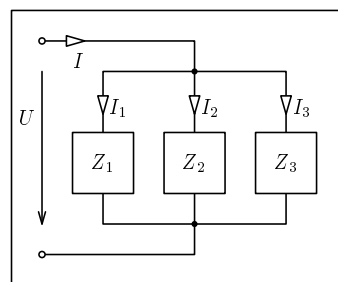
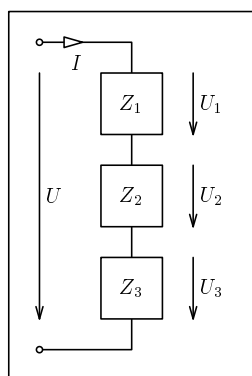
Fázor celkového napětí se rozloží na jednotlivé jednobrany v poměru

$$\mathbf{U} : \mathbf{U}_1 : \mathbf{U}_2 : \dots : \mathbf{U}_N = \mathbf{Z} : \mathbf{Z}_1 : \mathbf{Z}_2 : \dots : \mathbf{Z}_N .$$

Podobný vztah je i mezi efektivními hodnotami napětí, amplitudami napětí a absolutními hodnotami impedancí

$$U : U_1 : U_2 : \dots : U_N = Z : Z_1 : Z_2 : \dots : Z_N ,$$

$$U_m : U_{1m} : U_{2m} : \dots : U_{Nm} = Z : Z_1 : Z_2 : \dots : Z_N .$$



Obr. 5-2

Obr. 5-1

Například v sériovém obvodu  $LRC$  (obr. 1-6) platí

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} , \quad Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} ,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} \mathbf{Z}}{\operatorname{Re} \mathbf{Z}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} .$$

Při paralelním spojení několika jednobranů (obr. 5-2) je fázor napětí společný pro všechny jednobrany a fázor celkového proudu je vektorovým součtem jednotlivých fázorů proudů

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_N.$$

Celková admitance obvodu je

$$Y = \frac{I}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \dots + \frac{I_N}{U} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N,$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_N}.$$

Pokud jsou paralelně spojeny jen dva jednobrany, platí

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Fázor celkového proudu se rozloží na jednotlivé jednobrany v poměru

$$I : I_1 : I_2 : \dots : I_N = Y : Y_1 : Y_2 : \dots : Y_N.$$

Podobný vztah je i mezi efektivními hodnotami proudu, amplitudami proudu a absolutními hodnotami admitancí

$$I : I_1 : I_2 : \dots : I_N = Y : Y_1 : Y_2 : \dots : Y_N,$$

$$I_m : I_{1m} : I_{2m} : \dots : I_{Nm} = Y : Y_1 : Y_2 : \dots : Y_N.$$

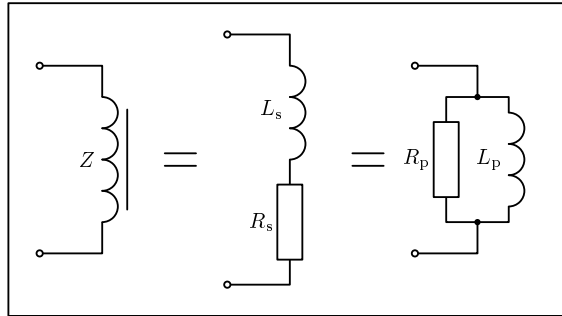
Například v paralelním obvodu LRC (obr. 1-7) platí

$$Y = \frac{I}{U} = \frac{1}{R} + j\omega C - \frac{j}{\omega L}, \quad Y = \frac{I}{U} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\operatorname{Im} Y}{\operatorname{Re} Y} = -R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

### Příklad 2

Skutečnou cívku, která má při dané frekvenci  $f$  impedanci  $Z$  o absolutní hodnotě  $Z$  a argumentu  $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$ , můžeme nahradit sériovým spojením ideální cívky o indukčnosti  $L_s$  a ideálního rezistoru o rezistanci  $R_s$  nebo paralelním spojením ideální cívky o indukčnosti  $L_p$  a ideálního rezistoru o rezistanci  $R_p$  (obr. 5-3). Určete vztahy mezi veličinami  $Z$ ,  $\varphi$ ,  $L_s$ ,  $R_s$ ,  $L_p$ ,  $R_p$ .



Obr. 5-3

### Řešení

Z rovnosti komplexních výrazů pro impedanci

$$\mathbf{Z} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi = R_s + j \omega L_s$$

plyne

$$R_s = Z \cos \varphi, \quad L_s = \frac{Z \sin \varphi}{\omega}.$$

Z rovnosti komplexních výrazů pro admitanci

$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{Z(\cos \varphi + j \sin \varphi)} = \frac{\cos \varphi - j \sin \varphi}{Z} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j \omega L_p} = \frac{1}{R_s + j \omega L_s} = \frac{R_s - j \omega L_s}{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}$$

plyne

$$R_p = R_s + \frac{\omega^2 L_s^2}{R_s} = \frac{Z}{\cos \varphi}, \quad L_p = L_s + \frac{R_s^2}{\omega^2 L_s} = \frac{Z}{\omega \sin \varphi}.$$

Pokud se vlastnosti cívky blíží k vlastnostem cívky ideální, tj.  $\varphi \rightarrow \pi/2$ , platí

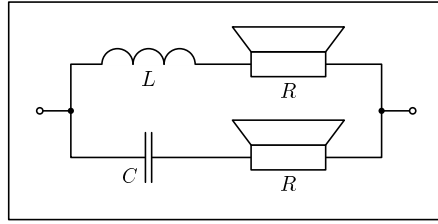
$$R_s \ll \omega L_s, \quad R_p \gg \omega L_p, \quad L_s \approx L_p \approx L, \quad R_p \approx \frac{\omega^2 L^2}{R_s}.$$

### Příklad 3

Reproduktorová soustava se dvěma reproduktory je zapojena podle obr. 5-4. Výškový reproduktor je ve větvi s kondenzátorem a hloubkový ve větvi s cívkou — vysvětlete. Oba reproduktory se v obvodu chovají jako rezistory o stejné rezistanci  $R = 5 \Omega$ . Cívku a kondenzátor považujeme za ideální součástky.

Ukažte, že indukčnost  $L$  cívky a kapacitu  $C$  kondenzátoru lze zvolit tak, aby impedance soustavy byla při všech frekvencích reálná a konstantní. Taková soustava má vlastnosti jediného rezistoru — určete jeho rezistanci.

Dále požadujeme, aby při dělicím kmitočtu  $f_d = 1 \text{ kHz}$  měly oba reproduktory stejný příkon. Určete indukčnost cívky a kapacitu kondenzátoru.



Obr. 5-4

### Řešení

Celková impedance soustavy je

$$Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)(R + j\omega L)}{R + j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R^2 + \frac{L}{C} + jR\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{2R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Tento zlomek je reálný pro všechny frekvence, jestliže poměr reálných částí čitatele a jmenovatele je při všech frekvencích stejný jako podíl imaginárních částí:

$$\frac{R^2 + \frac{L}{C}}{2R} = \frac{R\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}$$

V takovém případě

$$Z = R = \text{konst.}$$

Při dělicím kmitočtu  $f_d$  musí platit  $I_1 = I_2$ . Z toho plyne

$$Z_1 = Z_2, \quad \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}, \quad X_C = X_L, \\ \omega_d^2 = \frac{1}{LC} = 4\pi^2 f_d^2.$$

Kapacitu kondenzátoru a indukčnost cívky určíme ze vztahů:

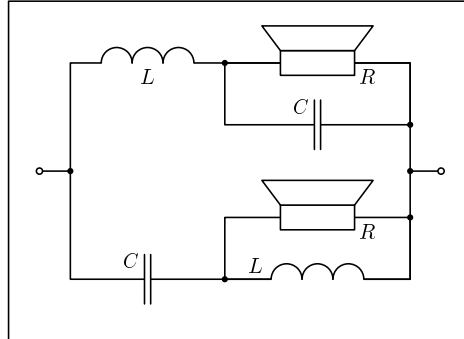
$$\frac{L}{C} \cdot \frac{1}{LC} = \frac{1}{C^2} = 4\pi^2 f_d^2 R^2, \quad \frac{L}{C} \cdot LC = L^2 = \frac{R^2}{4\pi^2 f_d^2}, \\ C = \frac{1}{2\pi f_d R}, \quad L = \frac{R}{2\pi f_d}.$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme  $C = 32 \mu\text{F}$ ,  $L = 0,80 \text{ mH}$ .

### Příklad 4

Dokonalějšího oddělení vysokých a hlubokých tónů dosáhneme pomocí reproduktorové soustavy druhého řádu zapojené podle obr. 5-5. Kondenzátory a cívky v obou větvích jsou stejné, oba reproduktory mají rezistanci  $5 \Omega$ . Také tato soustava může mít při všech frekvencích konstantní reálnou impedanci  $R$  a při dělicím kmitočtu  $f_d = 1 \text{ kHz}$  stejný elektrický příkon obou reproduktorů.

Určete potřebné hodnoty kapacity  $C$  a indukčnosti  $L$ .



Obr. 5-5

### Řešení

Celková admitance soustavy je

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega RL}{R + j\omega L}} + \frac{1}{j\omega L + \frac{R}{\frac{j\omega C}{R + \frac{1}{j\omega C}}}} = \\
 &= \frac{j\omega RC - \omega^2 LC}{R - \omega^2 RCL + j\omega L} + \frac{1 + j\omega RC}{R - \omega^2 RCL + j\omega L} = \frac{1 - \omega^2 LC + 2j\omega RC}{R - \omega^2 RCL + j\omega L}.
 \end{aligned}$$

Tento zlomek je reálný pro všechny frekvence, jestliže

$$\frac{L}{2RC} = R, \quad L = 2CR^2.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme  $Z = R$ .

Při dělicím kmitočtu  $f_d$  musí platit  $I_1 = I_2$ . Z toho plyne

$$\begin{aligned}
 Y_1 = Y_2, \quad |j\omega_d RC - \omega_d^2 LC| &= |1 + j\omega_d RC|, \quad \omega_d^2 LC = 1, \\
 \frac{1}{LC} &= 4\pi^2 f_d^2.
 \end{aligned}$$

Kapacitu kondenzátoru a indukčnost cívky určíme ze vztahů

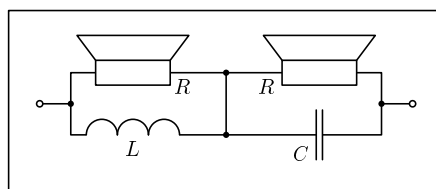
$$\begin{aligned}
 \frac{L}{2C} \cdot \frac{1}{LC} = \frac{1}{2C^2} = 4\pi^2 f_d^2 R^2, \quad \frac{L}{2C} \cdot LC = \frac{L^2}{2} = \frac{R^2}{4\pi^2 f_d^2}, \\
 C = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi f_d R}, \quad L = \frac{R}{\sqrt{2}\pi f_d}.
 \end{aligned}$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme  $C = 23 \mu\text{F}$ ,  $L = 1,1 \text{ mH}$ .



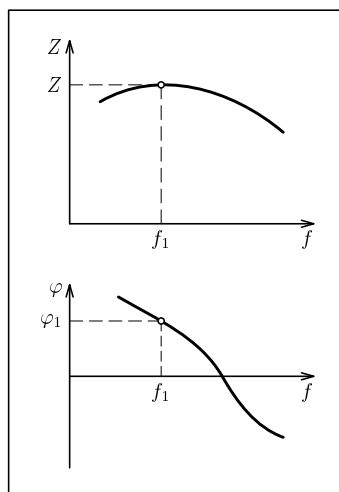
### Úloha 3.

Reproduktorová soustava na obr. 5-6 může také splňovat požadavky z příkladu 3. Jaká musí být kapacita kondenzátoru a indukčnost cívky?

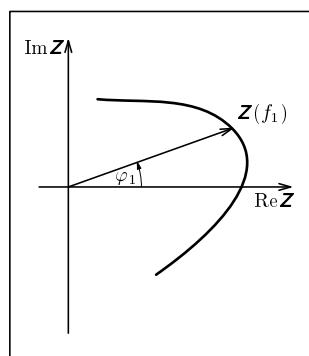


Obr. 5-6

## 6 Frekvenční charakteristiky lineárních impedančních jednobranů



Obr. 6-1



Obr. 6-2

Impedance lineárního jednobranu, ve kterém se vyskytují kondenzátory a cívky, závisí obvykle na frekvenci střídavého proudu  $Z = Z(f)$ . S měnění se frekvencí se mění absolutní hodnota impedance  $Z = Z(f)$  i její argument  $\varphi = \varphi(f)$ . Tyto závislosti znázorňujeme graficky pomocí dvou samostatných grafů, které nazýváme **frekvenční charakteristika absolutní hodnoty impedance** a **frekvenční charakteristika fáze** (obr. 6-1). Můžeme také použít jediný graf v Gaussově rovině, který zobrazuje komplexní funkci  $Z = Z(f)$  a nazývá se **komplexní frekvenční charakteristika**.

Je to křivka, kterou při změnách frekvence probíhá koncový bod vektoru impedance. K jednotlivým bodům křivky připisujeme příslušné frekvence (obr. 6-2).

**Příklad 5**

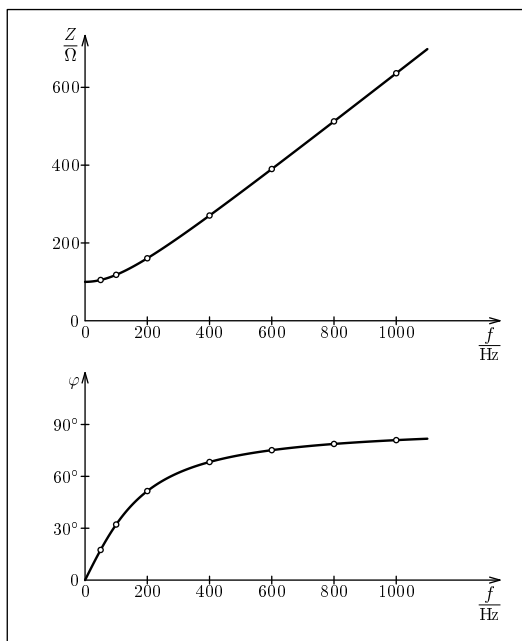
V intervalu (0 Hz; 1000 Hz) určete frekvenční charakteristiky sériového jednobranu  $RL$  tvořeného cívkou o indukčnosti  $L = 0,10$  H a rezistorem o odporu  $R = 100$   $\Omega$ .

**Řešení** Impedanci jednobranu, její absolutní hodnotu a argument určíme pomocí vztahů

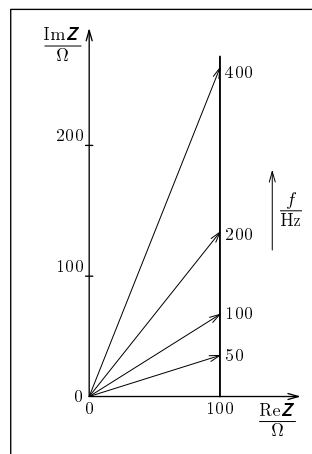
$$Z = R + j\omega L, \quad |Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

Frekvenční charakteristiky (obr. 6-3, 6-4) sestrojíme na základě tabulky:

|               |            |            |            |            |            |            |            |
|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $f/\text{Hz}$ | 50         | 100        | 200        | 400        | 600        | 800        | 1000       |
| $ Z /\Omega$  | 105        | 118        | 161        | 270        | 390        | 513        | 636        |
| $\varphi$     | $17^\circ$ | $32^\circ$ | $51^\circ$ | $68^\circ$ | $75^\circ$ | $79^\circ$ | $81^\circ$ |



Obr. 6-3



Obr. 6-4

Popsaným způsobem bychom pro různé jednobrany  $RL$  dostali různé frekvenční charakteristiky. Značného zjednodušení dosáhneme zavedením nových veličin:

**poměrná impedance** jednobranu  $RL$  
$$z = \frac{Z}{R} = 1 + j \frac{\omega L}{R},$$

**mezní úhlová frekvence** 
$$\omega_m = \frac{R}{L},$$

**mezní frekvence**  $f_m = \frac{R}{2\pi L}$  a **poměrná frekvence**  $\frac{f}{f_m}$ .

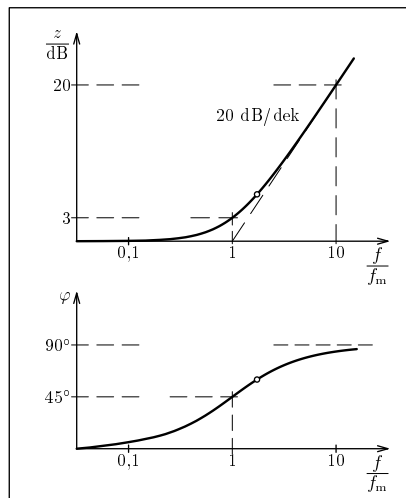
Platí vztahy

$$z = 1 + j \frac{\omega}{\omega_m} = 1 + j \frac{f}{f_m},$$

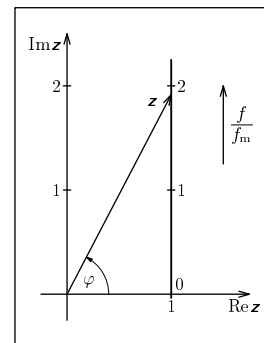
$$z = |z| = \sqrt{1 + \frac{f^2}{f_m^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{f}{f_m},$$

jejichž grafickým vyjádřením jsou **univerzální frekvenční charakteristiky sériových obvodů  $RL$**  (obr. 6-5, 6-6). Abychom obsáhli velký obor poměrných frekvencí a velký obor poměrných impedancí, volíme na vodorovné ose logaritmickou stupnici a absolutní hodnotu vyjadřujeme v **decibelech**:

$$z_{dB} = 20 \log z = 20 \log \sqrt{1 + \frac{f^2}{f_m^2}} = 10 \log \left( 1 + \frac{f^2}{f_m^2} \right).$$



Obr. 6-5



Obr. 6-6

**Diskuse:**

a) Při nízkých frekvencích  $f \ll f_m$  můžeme indukční složku obvodu zanedbat. Platí

$$z \rightarrow 1, \quad z_{dB} \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0^\circ.$$

b) Při mezní frekvenci  $f = f_m$  dostáváme

$$z = \sqrt{2}, \quad z_{dB} = 3, \quad \varphi = 45^\circ.$$

c) Při vysokých frekvencích  $f \gg f_m$  převládá vliv indukčnosti. Platí

$$z \rightarrow \infty, \quad z_{dB} \approx 20 \log \frac{f}{f_m}, \quad \varphi \rightarrow 90^\circ.$$

Podobným způsobem postupujeme i při určování frekvenčních charakteristik jiných jednobranů.

**Příklad 6**

Určete univerzální frekvenční charakteristiky paralelního jednobranu  $RC$ .

**Řešení**

Paralelní jednobran  $RC$  má impedanci

$$Z = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega CR}.$$

Zavedme veličiny **mezní úhlová frekvence** a **mezní frekvence**:

$$\omega_m = \frac{1}{RC}, \quad f_m = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Poměrná impedance je

$$z = \frac{Z}{R} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_m}} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_m}}.$$

Platí

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}}, \quad \varphi = -\arctg \frac{f}{f_m}, \quad z_{dB} = -10 \log \left(1 + \frac{f^2}{f_m^2}\right).$$

**Diskuse:**

a) Při nízkých frekvencích  $f \ll f_m$  můžeme kapacitní složku obvodu zanedbat. Platí

$$z \rightarrow 1, \quad z_{dB} \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0^\circ.$$

b) Při mezní frekvenci  $f = f_m$  dostáváme

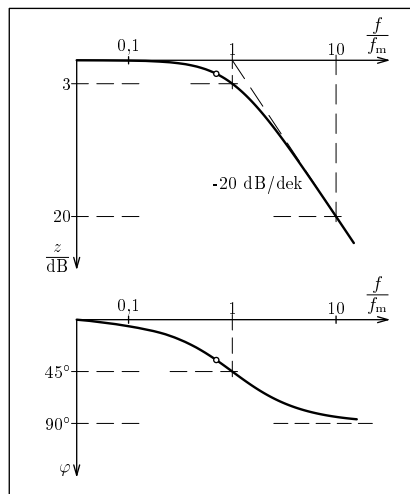
$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_{dB} = -3, \quad \varphi = -45^\circ.$$

c) Při vysokých frekvencích  $f \gg f_m$  převládá vliv kapacity a platí

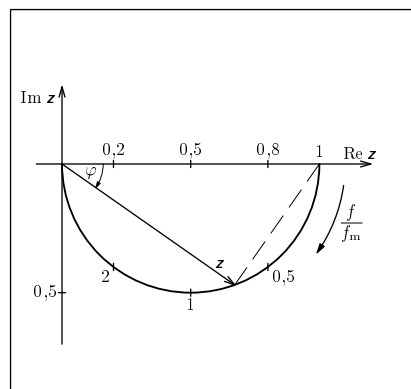
$$z \rightarrow 0, \quad z_{dB} \approx -20 \log \frac{f}{f_m}, \quad \varphi \rightarrow -90^\circ.$$

Frekvenční charakteristiky absolutní hodnoty relativní impedance a fáze jsou na obr. 6-7. Komplexní frekvenční charakteristika poměrné impedance je půlkružnice o polooměru 0,5 a středu v bodě  $0,5 + 0j$  (obr. 6-8) ležící ve čtvrtém kvadrantu Gaussovy roviny, neboť

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \cos \varphi, \quad \varphi < 0.$$



Obr. 6-7



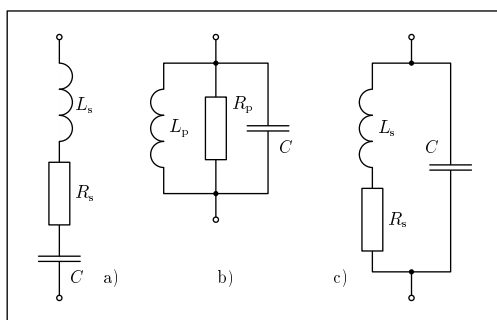
Obr. 6-8

### Úlohy

4. V intervalu (0 Hz; 500 Hz) určete frekvenční charakteristiky paralelního jednobranu  $RL$  tvořeného cívkou o indukčnosti  $L = 0,10$  H a rezistorem o odporu  $R = 100 \Omega$ .
5. Určete univerzální frekvenční charakteristiky paralelního jednobranu  $RL$ .
6. Určete univerzální frekvenční charakteristiky sériového jednobranu  $RC$ .

## 7 Jednoduché rezonanční jednobrany

Jednoduché rezonanční jednobrany vznikají sériovým nebo paralelním spojením cívky a kondenzátoru. Tomu odpovídají schémata na obr. 7-1, kde skutečnou cívku nahra-  
zujeme sériovým nebo paralelním spojením ideální cívky a rezistoru. Kondenzátor  
můžeme při nižších frekvencích považovat za ideální.



Obr. 7-1

Měníme-li frekvenci střídavého proudu v obvodu s rezonančním jednobranem, do-  
chází při určité frekvenci  $f_r$  k vyrovnání vlivu induktivní a kapacitní reaktance a celý  
jednobran se chová jako rezistor — fázové posunutí mezi napětím a proudem je nu-  
lové. Tento stav se nazývá **rezonance**. V oblasti rezonance se vlastnosti rezonančního  
jednobranu výrazně mění už při malých změnách frekvence.

### Příklad 7

Určete frekvenční charakteristiky sériového rezonančního jednobranu podle obr. 7-1a  
pro  $L_s = 0,250$  H,  $R_s = 200$   $\Omega$ ,  $C = 0,250$   $\mu$ F.

### Řešení

Pro sériový rezonanční jednobran platí vztahy odvozené v kap. 5:

$$Z = R + j\omega L_s - j\frac{1}{\omega C}, \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L_s - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L_s - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

### Diskuse:

a) Při sériové rezonanci platí **Thomsonův vztah**

$$\omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_s C}}, \quad f = f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C}}.$$

Rezonanční impedance je reálná a má minimální absolutní hodnotu  $Z_r = R_s$ . Napá-  
jíme-li obvod z generátoru se stálým svorkovým napětím (generátor s malým vnitř-  
ním odporem) a měníme-li frekvenci napětí, prochází obvodem při rezonanci největší  
proud. Na kondenzátoru a na cívce vznikají stejně velká napětí  $U_{C_r} = U_{L_r}$ , která však

mají opačnou fázi (obr. 1-6). Proto se neuplatňují v celkovém napětí  $U_r$ , které je proto stejně velké jako napětí na samotném rezistoru  $R_s$ . Obvykle platí  $U_r \ll U_{Cr} = U_{Lr}$ . Poměr

$$Q = \frac{U_{Cr}}{U_r} = \frac{U_{Lr}}{U_r} = \frac{1}{\omega_r C R_s} = \frac{\omega_r L_s}{R_s}$$

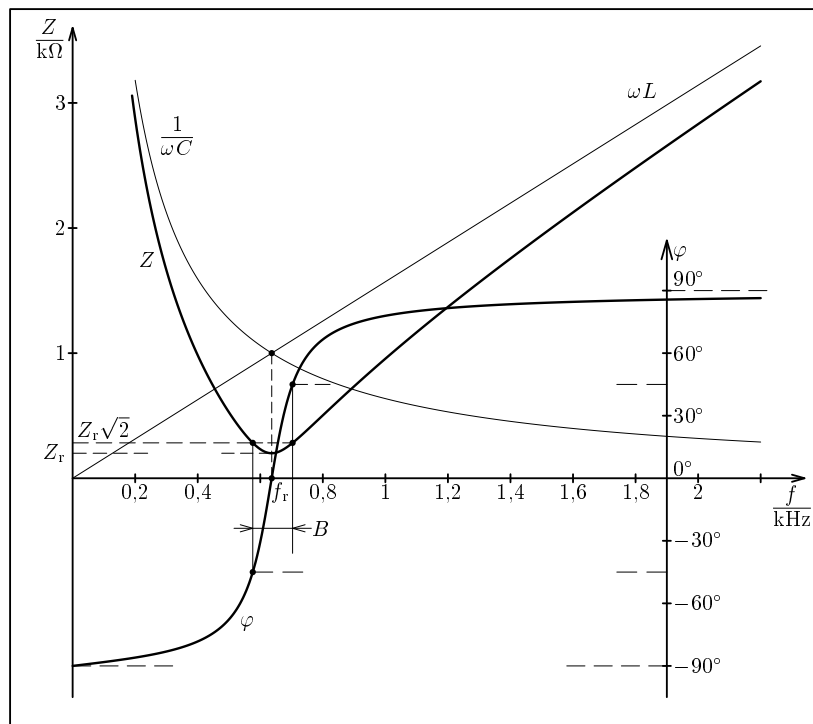
se nazývá **činitel jakosti** obvodu.

b) Při nízkých frekvencích  $f \ll f_r$  převládá kapacitní složka impedance a platí

$$Z \approx \frac{1}{j\omega C}, \quad Z \approx \frac{1}{\omega C}, \quad \varphi \rightarrow -90^\circ.$$

c) Při vysokých frekvencích  $f \gg f_r$  převládá indukční složka impedance a platí

$$Z \approx j\omega L, \quad Z \approx \omega L, \quad \varphi \rightarrow 90^\circ.$$



Obr. 7-2

Pro dané hodnoty indukčnosti  $L_s$ , rezistance  $R_s$  a kapacity  $C$  dostáváme:

$$f_r = 636,6 \text{ Hz}, \quad Q = 5,0.$$

Při kreslení frekvenčních charakteristik (obr. 7-2) můžeme vycházet z tabulky:

|               |           |              |              |              |              |              |              |
|---------------|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $f/\text{Hz}$ | 636,6     | 650          | 700          | 800          | 1000         | 1500         | 2000         |
| $Z/\Omega$    | 200       | 204          | 276          | 502          | 955          | 1949         | 2830         |
| $\varphi$     | $0^\circ$ | $11,8^\circ$ | $43,5^\circ$ | $66,5^\circ$ | $77,9^\circ$ | $84,0^\circ$ | $85,9^\circ$ |

|               |               |               |               |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $f/\text{Hz}$ | 600           | 550           | 500           | 400           | 300           | 200           |
| $Z/\Omega$    | 232           | 355           | 527           | 984           | 1663          | 2876          |
| $\varphi$     | $-30,7^\circ$ | $-55,7^\circ$ | $-67,7^\circ$ | $-78,3^\circ$ | $-83,1^\circ$ | $-86,0^\circ$ |

### Příklad 8

Sériovou kombinaci ideální cívky o indukčnosti  $L_s = 0,250 \text{ H}$  a rezistoru o rezistanci  $R_s = 200 \Omega$  z předcházejícího příkladu můžeme při frekvenci okolo 637 Hz nahradit paralelní kombinací ideální cívky o indukčnosti  $L_p$  a rezistoru o rezistanci  $R_p$ :

$$L_p = L_s + \frac{R_s^2}{\omega_r^2 L_s} = 0,260 \text{ H}, \quad R_p = R_s + \frac{\omega_r^2 L_s^2}{R_s} = 5200 \Omega.$$

Určete frekvenční charakteristiky paralelního rezonančního jednobranu podle obr. 7-1b pro  $L_p = 0,260 \text{ H}$ ,  $R_p = 5200 \Omega$ ,  $C = 0,250 \mu\text{F}$ .

### Řešení

Vyjdeme ze vztahů odvozených v kap. 5:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\omega C - \frac{j}{\omega L_p}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L_p}\right)^2}},$$

$$\varphi = \text{arctg} \left[ R_p \left( \frac{1}{\omega L_p} - \omega C \right) \right].$$

### Diskuse:

a) Také při paralelní rezonanci platí **Thomsonův vztah**

$$\omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_p C}}, \quad f = f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_p C}}.$$

Rezonanční impedance je reálná a dosahuje maximální absolutní hodnoty

$$Z_r = R_p.$$

Napájíme-li obvod z generátoru se stálou amplitudou střídavého proudu (generátor s velkým vnitřním odporem), naměříme při rezonanci největší napětí. Proudů ve větvi s kondenzátorem  $I_{C_r}$  a ve větvi s cívkou  $I_{L_r}$  jsou stejně velké, mají však opačnou fázi a navenek se ruší. Celkový rezonanční proud  $I_r$  je stejný jako proud procházející rezistorem  $R_p$  a je obvykle mnohem menší než  $I_{C_r}$  a  $I_{L_r}$ . Poměr



$$Q = \frac{I_{C_r}}{I_r} = \frac{I_{L_r}}{I_r} = \omega_r C R_p = \frac{R_p}{\omega_r L_p}$$

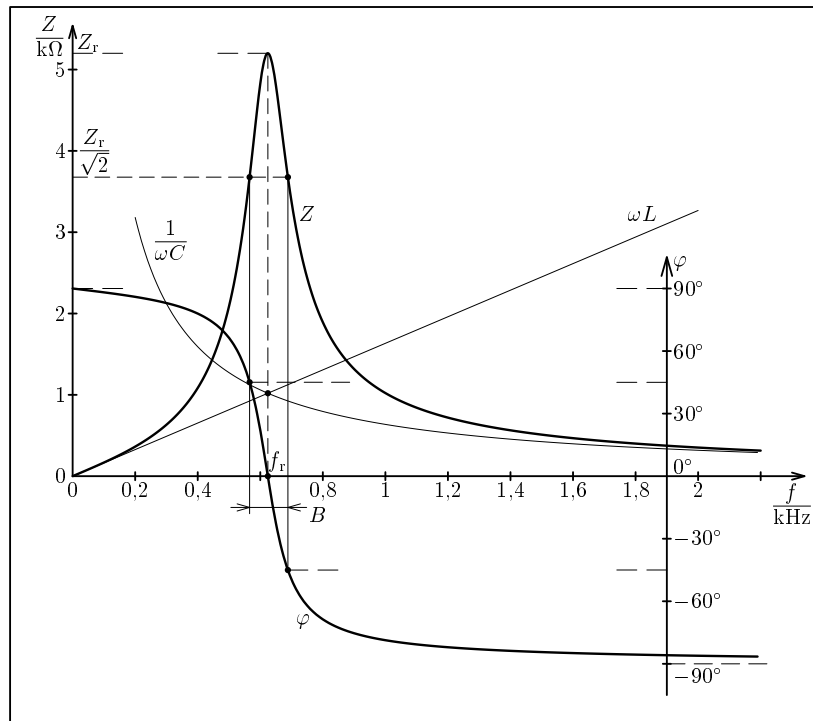
se nazývá **činitel jakosti** paralelního rezonančního jednobranu.

b) Při nízkých frekvencích  $f \ll f_r$  převládá indukční složka impedance a platí  
 $Z \approx j\omega L$ ,  $Z \approx \omega L$ ,  $\varphi \rightarrow 90^\circ$ .

c) Při vysokých frekvencích  $f \gg f_r$  převládá kapacitní složka impedance a platí  
 $Z \approx \frac{1}{j\omega C}$ ,  $Z \approx \frac{1}{\omega C}$ ,  $\varphi \rightarrow -90^\circ$ .

Pro dané hodnoty indukčnosti  $L_p$ , rezistance  $R_p$  a kapacity  $C$  dostáváme

$$f_r = 624,3 \text{ Hz}, \quad Q = 5,1.$$



Obr. 7-3

Při kreslení frekvenčních charakteristik (obr. 7-3) můžeme vycházet z tabulky:

|                    |           |               |               |               |               |               |               |
|--------------------|-----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $f/\text{Hz}$      | 624,3     | 650           | 700           | 800           | 1000          | 1500          | 2000          |
| $Z/\text{k}\Omega$ | 5,20      | 4,81          | 3,38          | 1,90          | 1,02          | 0,51          | 0,35          |
| $\varphi$          | $0^\circ$ | $-22,4^\circ$ | $-49,5^\circ$ | $-68,6^\circ$ | $-78,7^\circ$ | $-84,4^\circ$ | $-86,1^\circ$ |

|                    |              |              |              |              |              |              |
|--------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $f/\text{Hz}$      | 600          | 550          | 500          | 400          | 300          | 200          |
| $Z/\text{k}\Omega$ | 4,82         | 3,17         | 2,09         | 1,09         | 0,63         | 0,36         |
| $\varphi$          | $22,0^\circ$ | $52,3^\circ$ | $66,3^\circ$ | $78,0^\circ$ | $83,0^\circ$ | $86,0^\circ$ |

### Příklad 9

Určete frekvenční charakteristiky paralelního rezonančního jednobranu s rezistorem v indukční větvi podle obr. 7-1c pro  $L_s = 0,250 \text{ H}$ ,  $R_s = 200 \Omega$ ,  $C = 0,250 \mu\text{F}$ .

### Řešení

Celková admitance jednobranu

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R_s + j\omega L_s} + j\omega C = \frac{1 - \omega^2 L_s C + j\omega C R_s}{R_s + j\omega L_s}$$

je reálná, jestliže reálné a imaginární části čitatele a jmenovatele zlomku mají stejný poměr

$$\frac{1 - \omega^2 L_s C}{R_s} = \frac{C R_s}{L_s}.$$

Úpravou dostaneme rezonanční úhlovou frekvenci

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{L_s C} - \frac{R_s^2}{L_s^2}},$$

kteřá je poněkud menší než při sériové rezonanci. Rezonanční admitance a impedance jsou

$$\mathbf{Y}_r = Y_r = \frac{C R_s}{L_s}, \quad \mathbf{Z}_r = Z_r = \frac{L_s}{C R_s}.$$

Průběh frekvenčních charakteristik (obr. 7-4) vypočítáme užitím vztahů

$$Z = \sqrt{\frac{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}{(1 - \omega^2 L_s C)^2 + \omega^2 C^2 R_s^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L_s}{R_s} - \arctg \frac{\omega C R_s}{1 - \omega^2 L_s C}.$$

Pro dané hodnoty indukčnosti  $L_s$ , rezistance  $R_s$  a kapacity  $C$  dostáváme  $Z_r = 5000 \Omega$ ,  $f_r = 623,7 \text{ Hz}$ . Při kreslení charakteristik můžeme vycházet z tabulky:

|                    |           |               |               |               |               |               |               |
|--------------------|-----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $f/\text{Hz}$      | 623,7     | 650           | 700           | 800           | 1000          | 1500          | 2000          |
| $Z/\text{k}\Omega$ | 5,00      | 4,99          | 3,68          | 2,01          | 1,06          | 0,52          | 0,35          |
| $\varphi$          | $0^\circ$ | $-22,8^\circ$ | $-53,8^\circ$ | $-75,6^\circ$ | $-85,2^\circ$ | $-88,9^\circ$ | $-89,6^\circ$ |

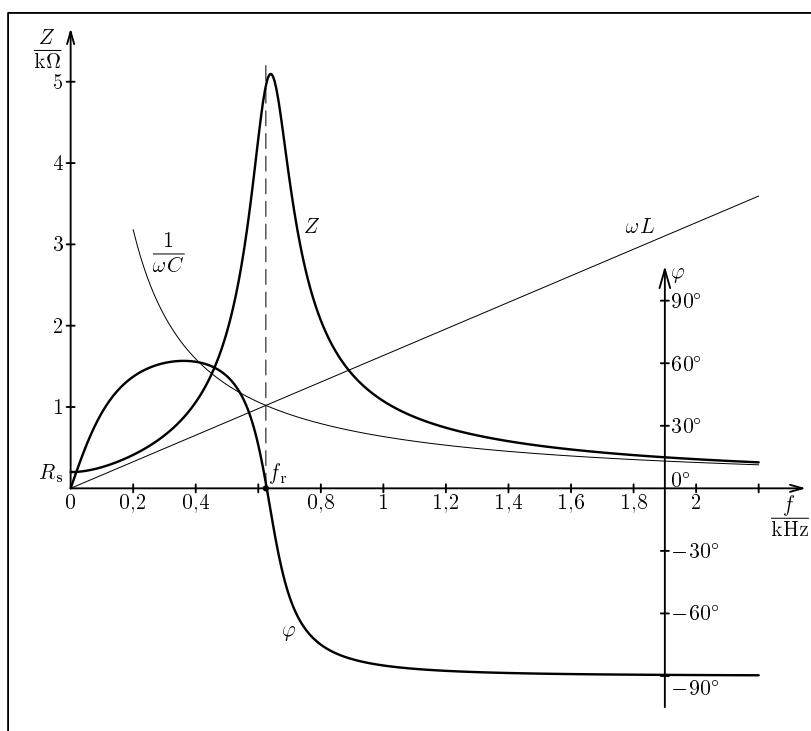
|                    |              |              |              |              |              |              |
|--------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $f/\text{Hz}$      | 600          | 550          | 500          | 400          | 300          | 200          |
| $Z/\text{k}\Omega$ | 4,40         | 2,89         | 1,96         | 1,07         | 0,65         | 0,41         |
| $\varphi$          | $18,7^\circ$ | $42,7^\circ$ | $53,4^\circ$ | $60,6^\circ$ | $60,1^\circ$ | $53,2^\circ$ |

Absolutní hodnota impedance dosáhne maxima při vyšší frekvenci než je frekvence rezonanční, kdy platí

$$\omega_{\max}^2 = \frac{2L_s - CR_s + \sqrt{L_s^2 + 2L_sCR_s^2 + 4C^2R_s^2}}{3L_s^2C}.$$

V našem případě  $f_{\max} = 636,9$  Hz,  $Z_{\max} = 5,099$  k $\Omega$ .

Při nízkých frekvencích  $f \ll f_r$  se nejvíce uplatňuje rezistance  $R_s$ . Platí  $Z \rightarrow R_s$ ,  $\varphi \rightarrow 0$ .



Obr. 7-4

Frekvenční charakteristiky paralelního jednobranu podle obr. 7-1b a paralelního jednobranu se sériovým rezistorem v indukční větvi se podstatně liší jen pro  $f \rightarrow 0$ , jinak je jejich průběh obdobný. Musíme si ovšem uvědomit, že v obou případech pracujeme s určitou idealizací skutečného paralelního rezonančního jednobranu tvořeného reálnou cívku a kondenzátorem. Jeho frekvenční charakteristiky by ležely mezi teoretickými charakteristikami z obr. 7-3 a 7-4.

## 8 Univerzální frekvenční charakteristiky rezonančních jednobranů. Šířka pásma

Popis vlastností sériových rezonančních jednobranů podle obr. 7-1a a paralelních rezonančních jednobranů podle obr. 7-1b můžeme zjednodušit a sjednotit zavedením veličin

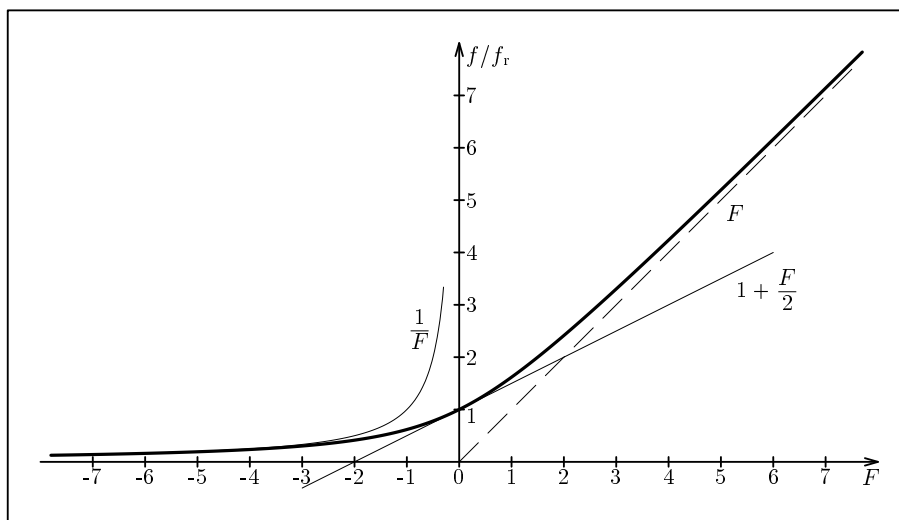
$$\begin{aligned} \text{poměrná impedance} \quad z &= \frac{Z}{Z_r} \\ \text{a poměrné rozladění} \quad F &= \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} = \frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f}. \end{aligned}$$

Vztah mezi poměrnou frekvencí  $\frac{f}{f_r}$  a poměrným rozladěním  $F$

$$\frac{f}{f_r} = \frac{F}{2} + \sqrt{\frac{F^2}{4} + 1}$$

je graficky znázorněn na obr. 8-1. Pro malá rozladění  $|F| \ll 1$  platí

$$\frac{f}{f_r} \approx 1 + \frac{F}{2}.$$



Obr. 8-1

Při laboratorních pracích můžeme využít tabulku:

|         |   |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $F$     | 0 | 1     | -1    | 2     | -2    | 3     | -3    | 4     | -4    |
| $f/f_r$ | 1 | 1,618 | 0,618 | 2,414 | 0,414 | 3,303 | 0,303 | 4,236 | 0,236 |

|         |       |       |       |       |       |       |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $F$     | 5     | -5    | 6     | -6    | 7     | -7    |
| $f/f_r$ | 5,193 | 0,193 | 6,162 | 0,162 | 7,140 | 0,140 |

**Poměrná impedance sériového rezonančního jednobranu** podle obr. 7-1a je

$$z = \frac{Z}{R_s} = 1 + j \left( \frac{\omega L_s}{R_s} - \frac{1}{\omega C R_s} \right) = 1 + j Q \left( \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right) = 1 + j Q F,$$

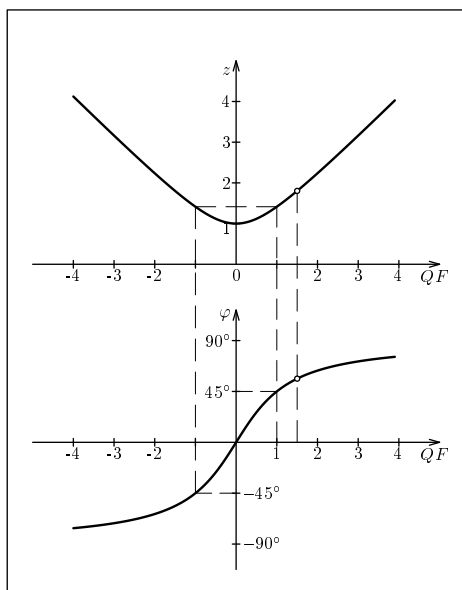
neboť

$$\frac{L_s}{R_s} = \frac{Q}{\omega_r}, \quad \frac{1}{C R_s} = Q \omega_r.$$

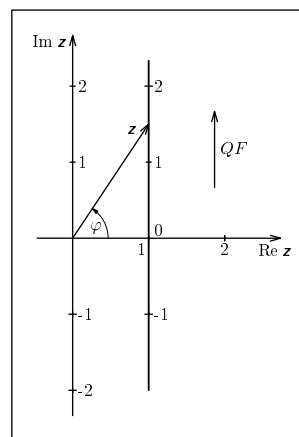
Vztahy

$$z = \sqrt{1 + (QF)^2}, \quad \varphi = \arctg(QF)$$

vyjadřují **absolutní hodnotu poměrné impedance** a **fázové posunutí** mezi napětím a proudem jako funkce jediné proměnné  $QF$ . Grafy těchto funkcí (obr. 8-2) jsou **univerzální frekvenční charakteristiky** sériového rezonančního jednobranu. **Univerzální komplexní frekvenční charakteristika** sériového rezonančního jednobranu v Gaussově rovině je přímka procházející bodem  $1 + 0j$  rovnoběžně s imaginární osou (obr. 8-3).



Obr. 8-2



Obr. 8-3

Šířka pásma  $B$  sériového rezonačního obvodu je definována jako velikost frekvenčního intervalu, ve kterém platí  $z \leq \sqrt{2}$ . Příkon jednobranu  $P = U^2 \cos \varphi / Z$  při stálém napětí  $U$  neklesne uvnitř pásma pod jednu polovinu příkonu rezonačního  $P_r = U^2 / R_s$ . V krajních bodech tohoto intervalu platí

$$|QF| = 1, \quad F_{1,2} = \pm \frac{1}{Q}.$$

Pokud je  $Q \gg 1$ , můžeme psát

$$\frac{f_1}{f_r} \approx 1 + \frac{F_1}{2} = 1 + \frac{1}{2Q}, \quad f_1 = f_r \left( 1 + \frac{1}{2Q} \right), \quad \text{a podobně} \quad f_2 = f_r \left( 1 - \frac{1}{2Q} \right),$$

$$B = f_1 - f_2 = \frac{f_r}{Q}.$$

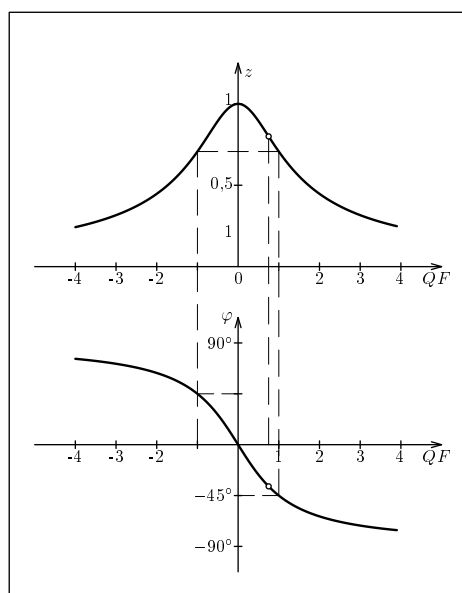
Pro jednobran z př. 7 dostáváme

$$B = \frac{637 \text{ Hz}}{5} = 127 \text{ Hz}.$$

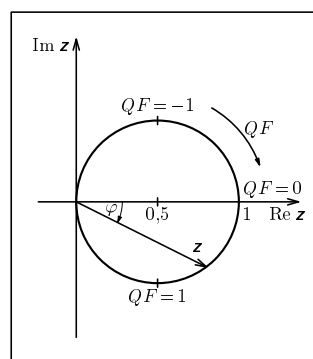
**Poměrná impedance paralelního rezonačního jednobranu** podle obr. 7-1b je

$$z = \frac{Z}{R_p} = \frac{1}{1 + j \left( R_p \omega C - \frac{R_p}{\omega L_p} \right)} = \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)} = \frac{1}{1 + jQF},$$

z čehož plyne  $\varphi = -\arctg(QF)$ ,  $z = \frac{1}{\sqrt{1 + (QF)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}} = \cos \varphi$ .



Obr. 8-4



Obr. 8-5

Univerzální komplexní frekvenční charakteristika je kružnice v Gaussově rovině se středem v bodě  $0,5 + 0j$  a poloměrem  $0,5$  (obr. 8-5).

Šířka pásma  $B$  paralelního rezonančního jednobranu je definována jako velikost frekvenčního intervalu, ve kterém  $z \geq 1/\sqrt{2}$ . Příkon jednobranu  $P = I^2 Z \cos \varphi$  při stálém proudu  $I$  neklesne uvnitř pásma pod jednu polovinu příkonu rezonančního  $P_r = R_p I^2$ . V krajních bodech tohoto intervalu platí  $|QF| = 1$ . Podobně jako u sériového jednobranu můžeme odvodit  $B = f_r/Q$ . Pro jednobran z př. 8 dostaneme

$$B = \frac{624 \text{ Hz}}{5,1} = 122 \text{ Hz}.$$

### Úlohy

7. Sériový rezonanční jednobran z př. 7 připojíme k tónovému generátoru, který má efektivní hodnotu napětí naprázdno  $U_0 = 10 \text{ V}$  a vnitřní odpor  $75 \Omega$ . (Generátor se chová jako sériové spojení ideálního zdroje harmonického napětí a rezistoru.) Na generátoru nastavíme rezonanční frekvenci  $f_r$ . Jaká bude efektivní hodnota proudu procházejícího obvodem? Jaké bude svorkové napětí generátoru? Jaké napětí naměříme na samotném kondenzátoru?

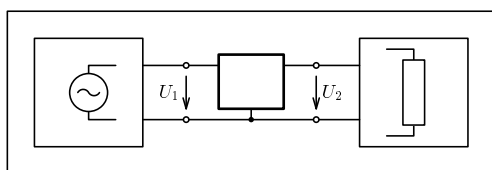
8. K tónovému generátoru, který má efektivní hodnotu napětí naprázdno  $U_0 = 10 \text{ V}$  a vnitřní odpor  $2,5 \text{ k}\Omega$ , připojíme paralelní rezonanční jednobran z př. 8 a nastavíme jeho rezonanční frekvenci. Jaký proud budeme odebírat z generátoru a jaké bude jeho svorkové napětí? Jaké proudy budou procházet kondenzátorem a cívkou?

9. Jak se změní frekvenční charakteristiky sériového rezonančního jednobranu z př. 7, zmenšíme-li rezistanci cívky na  $100 \Omega$ ?

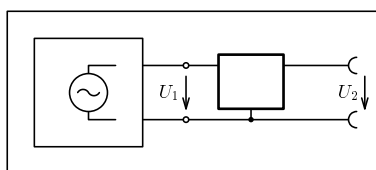
10. Jaké hodnoty  $L_p$ ,  $R_p$  by musela mít cívka, aby s kondenzátorem o kapacitě  $500 \text{ pF}$  tvořila paralelní rezonanční jednobran s rezonanční frekvencí  $f_r = 500 \text{ kHz}$  a činitelem jakosti  $Q = 20$ ?

## 9 Lineární dvojbrany. Napěťový přenos

V elektronických zařízeních se přenos harmonického napětí z jednoho obvodu, vstupního, do druhého obvodu, výstupního, často uskutečňuje pomocí vazebních členů vytvořených z lineárních součástí (rezistorů, kondenzátorů a cívek) připojených do obvodů pomocí dvou vstupních a dvou výstupních svorek. Takový vazební člen se nazývá lineární dvojbran. Soustava součástí tvořící dvojbran má jen tři vývody, z nichž jeden je společný pro oba obvody. Jedna vstupní svorka je pak přímo spojena s jednou svorkou výstupní. Vstupní obvod obsahuje zdroj harmonického napětí a do výstupního obvodu je zařazen spotřebič — zátěž (obr. 9-1). Pokud není výstupní obvod zapojen, jedná se o dvojbran na výstupu nezatížený (obr. 9-2).



Obr. 9-1



Obr. 9-2

Vlastnosti lineárního dvojbranu charakterizuje veličina **napěťový přenos**

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{U}_1},$$

kde  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{U}_2$  jsou fázory vstupního a výstupního napětí. Pro absolutní hodnotu napěťového přenosu a fázové posunutí mezi výstupním a vstupním napětím platí

$$A = \frac{U_{2m}}{U_{1m}} = \frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\operatorname{Re}^2 \mathbf{A} + \operatorname{Im}^2 \mathbf{A}}, \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \arctg \frac{\operatorname{Im} \mathbf{A}}{\operatorname{Re} \mathbf{A}}.$$

Při stálé frekvenci je napěťový přenos dvojbranu konstantní. To znamená, že amplituda výstupního napětí  $U_{2m}$  je přímo úměrná amplitudě vstupního napětí  $U_{1m}$  a fázové posunutí obou napětí nezávisí na jejich amplitudě. Měníme-li ale frekvenci napětí, mění se zpravidla i napěťový přenos dvojbranu. Funkce  $A = A(f)$ ,  $\varphi = \varphi(f)$  můžeme graficky znázornit dvěma způsoby:

- pomocí dvou samostatných grafů, které nazýváme **frekvenční charakteristika absolutní hodnoty napěťového přenosu** neboli **útlumová charakteristika a frekvenční charakteristika fázového posunutí**,
- pomocí jediného grafu v Gaussově rovině, který se nazývá **komplexní frekvenční charakteristika napěťového přenosu**.

V prvním případě absolutní hodnotu napěťového přenosu často vyjadřujeme v decibelech

$$a = 20 \log A.$$



**Příklad 10**

Určete frekvenční charakteristiky nezatíženého dvojbranu  $RC$  (obr. 9-3).

**Řešení**

Jedná se vlastně o sériové spojení rezistoru s kondenzátorem, kde se napětí rozdělí v poměru impedancí

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}.$$

Zavedením mezní úhlové frekvence a mezní frekvence

$$\omega_m = \frac{1}{RC}, \quad f_m = \frac{1}{2\pi RC}$$

sjednotíme popis všech nezatížených dvojbranů  $RC$  pomocí vztahů:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_m}} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_m}}.$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}}, \quad \varphi = -\arctg \frac{f}{f_m}, \quad a = -10 \log \left(1 + \frac{f^2}{f_m^2}\right).$$

**Diskuse:**

a) Při nízkých frekvencích  $f \ll f_m$  je kapacitní reaktance kondenzátoru mnohem větší než odpor rezistoru a na výstupu dvojbranu je téměř celé vstupní napětí. Platí

$$A \rightarrow 1, \quad a \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0^\circ.$$

b) Při mezní frekvenci  $f = f_m$  dostáváme

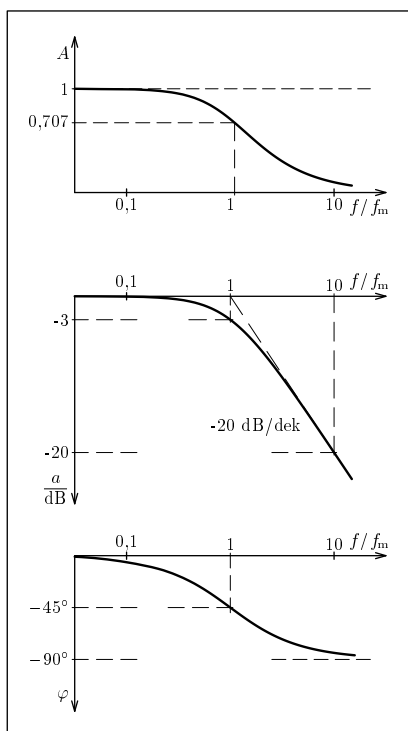
$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a = -3 \text{ dB}, \quad \varphi = -45^\circ.$$

c) Při vysokých frekvencích  $f \gg f_m$  vzniká velký úbytek napětí na rezistoru a platí

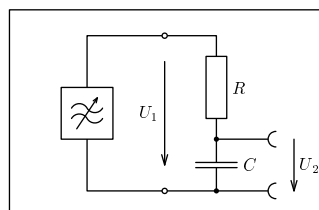
$$A \rightarrow 0, \quad a \approx -20 \log \frac{f}{f_m}, \quad \varphi \rightarrow -90^\circ.$$

Univerzální frekvenční charakteristiky dvojbranu  $RC$  jsou na obr. 9-4 a 9-5. Komplexní frekvenční charakteristika je půlkružnice o poloměru 0,5 a středu v bodě  $0,5 + 0j$  ležící ve čtvrtém kvadrantu Gaussovy roviny.

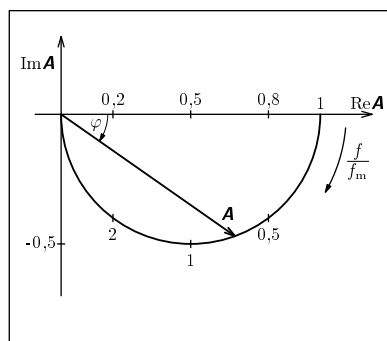
Dvojbran  $RC$  se chová jako **dolní propust**, která harmonické signály o frekvenci menší než  $f_m$  propouští téměř bez zeslabení a signály o frekvenci větší než  $f_m$  potlačuje. Po překročení mezní frekvence absolutní hodnota napětového přenosu klesá o 20 dB na dekádu (tj. o 6 dB na oktávu).



Obr. 9-4



Obr. 9-3



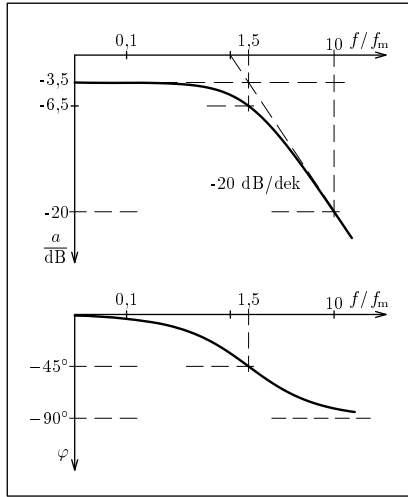
Obr. 9-5

### Úlohy

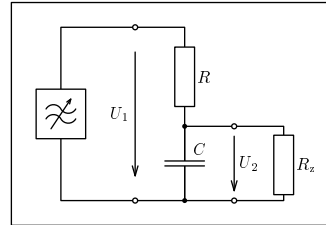
**11.** Porovnejte univerzální frekvenční charakteristiky napětového přenosu nezátíženého dvojbranu  $RC$  a univerzální frekvenční charakteristiky impedance paralelního jednobranu  $RC$  (obr. 6-7, 6-8).

**12.** Odvoďte vztahy popisující frekvenční charakteristiky dvojbranu  $RC$  zatíženého rezistorem o odporu  $R_z = 2R$  (obr. 9-6, 9-7, 9-8).

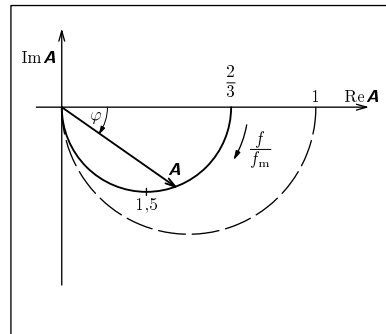
**13.** Nezátížený dvojbran  $CR$  (obr. 9-9) se chová jako **horní propust**. Odvoďte vztahy popisující jeho univerzální frekvenční charakteristiky (obr. 9-10, 9-11).



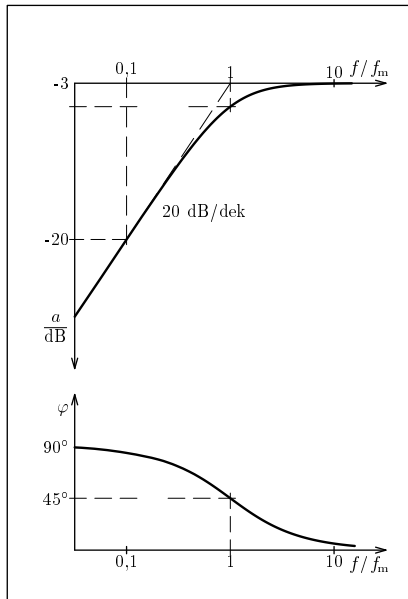
Obr. 9-7



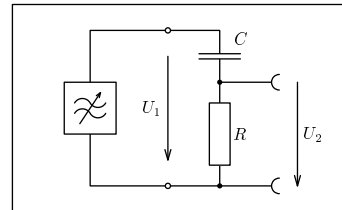
Obr. 9-6



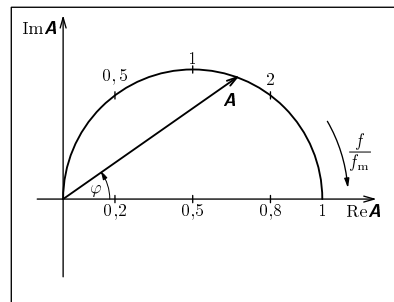
Obr. 9-8



Obr. 9-10



Obr. 9-9



Obr. 9-11

**Příklad 11**

Určete frekvenční charakteristiky nezátíženého **Wienova členu** sestaveného ze dvou stejných rezistorů a dvou stejných kondenzátorů (obr. 9-12).

**Řešení**

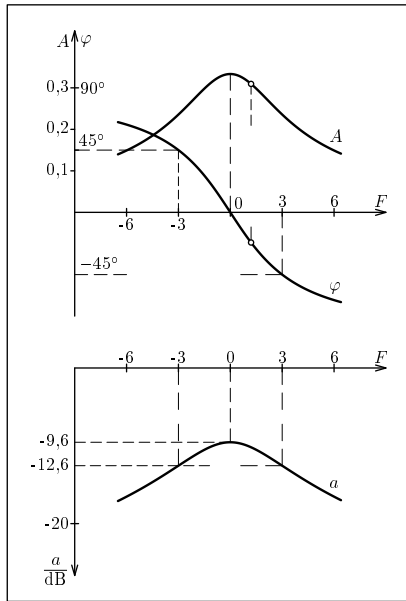
Napěťový přenos Wienova členu je

$$A = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2} + \frac{3}{j\omega C}} = \frac{1}{3 + j\left(\omega RC - \frac{1}{\omega RC}\right)}$$

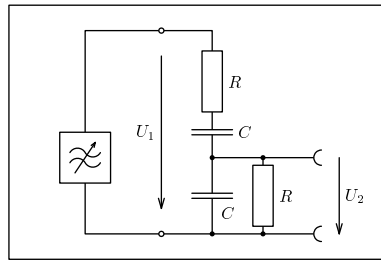
Zavedením veličin **kritická úhlová frekvence  $\omega_0$** , **kritická frekvence  $f_0$**  a **po-  
měrné rozladění  $F$** :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}, \quad F = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}$$

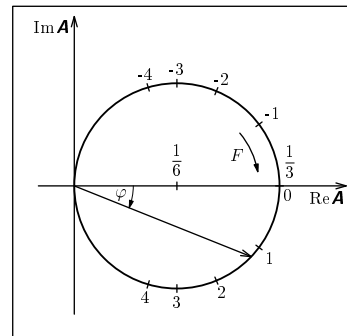
dostaneme vztahy  $A = \frac{1}{3 + jF}$ ,  $A = \frac{1}{\sqrt{9 + F^2}}$ ,  $\varphi = \arctg\left(-\frac{F}{3}\right)$ .



Obr. 9-13



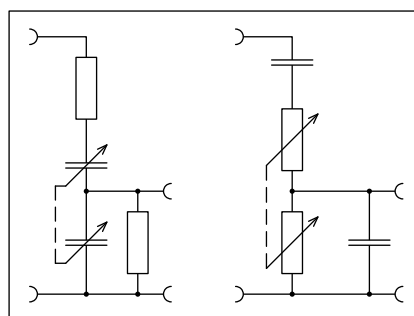
Obr. 9-12



Obr. 9-14

**Diskuse:** Napěťový přenos je reálný a má maximální absolutní hodnotu  $A_{\max} = \frac{1}{3}$ ,  $a = -9,6$  dB jestliže  $F = 0$ , neboli  $f = f_0$ . Harmonické signály nízkých frekvencí  $f \ll f_0$  a vysokých frekvencí  $f \gg f_0$  jsou potlačeny. Wienův člen se chová jako **pásmová propust**. Šířka pásma (tj. intervalu, kde  $A \geq A_{\max}/\sqrt{2}$ ) je velká. V krajních bodech pásma platí  $F = \pm 3$ , což dává frekvence  $f_1 = 0,303f_0$ ,  $f_2 = 3,303f_0$ . Fázové posunutí výstupního napětí je kladné pro  $f < f_0$  a záporné pro  $f > f_0$ .

Univerzální frekvenční charakteristiky Wienova členu jsou na obr. 9-13 a 9-14.



Obr. 9-15

Wienův člen se využívá jako základní zpětnovazební prvek většiny nízkofrekvenčních tónových generátorů. S jeho kritickou frekvencí generátor kmitá. Plynulé ladění generátoru se provádí současnou změnou obou kapacit pomocí dvojitého otočného kondenzátoru, nebo současnou změnou obou rezistancí pomocí dvojitého reostatu (obr. 9-15).

**Úloha 14.** Dokažte, že komplexní frekvenční charakteristika Wienova členu je kružnice o poloměru  $1/6$  se středem v bodě  $1/6 + 0j$ .

#### Příklad 12

Reproduktorové soustavy na obr. 5-4 a 5-5 (př. 3 a 4) můžeme považovat za dvojice dvojbranů, u kterých vstupní napětí je celkové napětí přiváděné na soustavu a výstupní napětí je napětí na reproduktoru. U obou soustav vyšetřete frekvenční charakteristiky napěťového přenosu ve větvi s hloubkovým reproduktorem.

#### Řešení

a) Sériové spojení cívky s reproduktorem budeme vyšetřovat jako dvojbran  $LR$ . Pro jeho napěťový přenos platí

$$\mathbf{A} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega L}{R}} = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_m}}, \quad \text{kde } f_m = \frac{R}{2\pi L}$$

je mezní kmitočet dvojbranu a současně i dělicí kmitočet reproduktorové soustavy,

neboť

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad f_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f_d.$$

Napěťový přenos dvojbranu  $LR$  je vyjádřen stejným vztahem jako u dvojbranu  $RC$ , jehož frekvenční charakteristiky jsou na obr. 9-4 a 9-5. Z nich vyčteme, že po překročení dělicí frekvence klesá úroveň signálu na hloubkovém reproduktoru o 20 dB na dekádu.

b) V reproduktorové soustavě podle obr. 5-5 budeme větev s hloubkovým reproduktorem vyšetřovat jako dvojbran na obr. 9-16, jehož frekvenční charakteristiky jsou na obr. 9-17 a 9-18. Napěťový přenos dvojbranu je

$$\mathbf{A} = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{j\omega LR + \frac{L}{C} + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + \frac{j\omega L}{R}}.$$

Současně platí

$$R = \sqrt{\frac{L}{2C}}, \quad \omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Po dosazení a úpravě dostáváme

$$\mathbf{A} = \frac{1}{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2 + j\frac{f}{f_d}\sqrt{2}}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_d}\right)^4}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{f}{f_d}\sqrt{2}}{\left(\frac{f}{f_d}\right)^2 - 1}.$$

#### Diskuse:

a) Při dělicí frekvenci  $f_d$  dostáváme

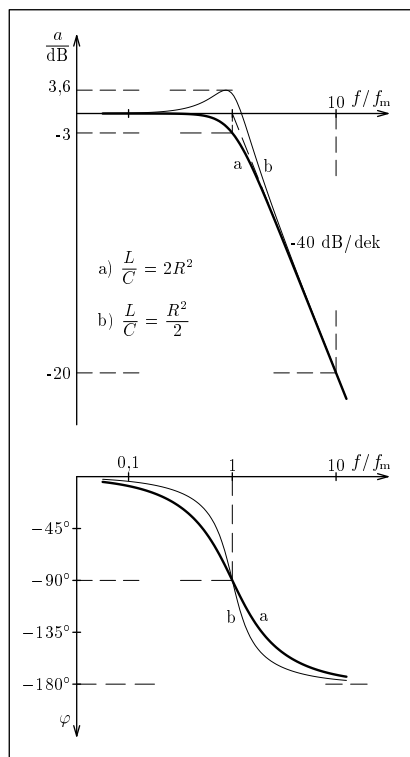
$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a = -3 \text{ dB}, \quad \varphi = -90^\circ.$$

b) Při nízkých frekvencích  $f \ll f_d$  platí  $A \doteq 1$ ,  $\varphi \rightarrow 0^\circ$ .

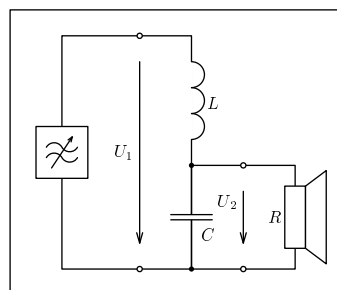
c) Při vysokých frekvencích  $f \gg f_d$  platí

$$a = -40 \log \frac{f}{f_d}, \quad \varphi \rightarrow -180^\circ.$$

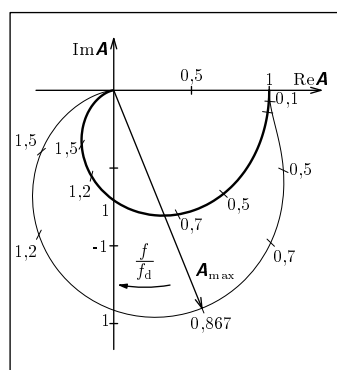
Po překročení dělicí frekvence klesá úroveň napětí na reproduktoru o 40 dB na dekádu, tedy podstatně rychleji než u soustavy podle obr. 5-4.



Obr. 9-16



Obr. 9-18



Obr. 9-17

**Úloha 15:** Změníme-li v dvojbranu na obr. 9-16 indukčnost cívky na  $L_1 = 2L$  a kapacitu kondenzátoru na  $C_1 = C/2$ , dostaneme frekvenční charakteristiky, které jsou na obr. 9-17, 9-18 vyznačeny tenkými čarami. V blízkosti dělicího kmitočtu dojde k rezonančnímu zesílení. Odvoďte vztahy, které popisují průběh charakteristik. Pro kterou hodnotu poměrné frekvence  $f/f_d$  je napěťový přenos maximální a jaká je jeho velikost? I v tomto případě definujeme

$$\omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

## 10 Náměty laboratorních prací

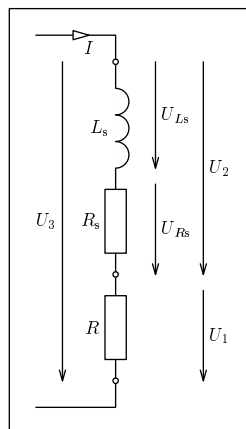
### 10.1 Měření indukčnosti a rezistance cívky metodou tří voltmetrů

#### Teorie

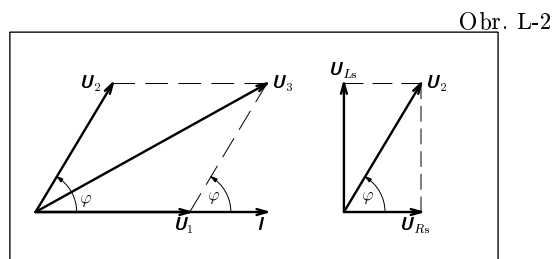
Cívku o indukčnosti  $L_s$  a rezistancí  $R_s$  spojíme sériově s rezistorem o známém odporu  $R$  (obr. L-1). Z fázorového diagramu (obr. L-2) odvodíme vztahy

$$\cos \varphi = \frac{U_3^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1U_2}, \quad U_{R_s} = U_2 \cos \varphi, \quad U_{L_s} = U_2 \sin \varphi.$$

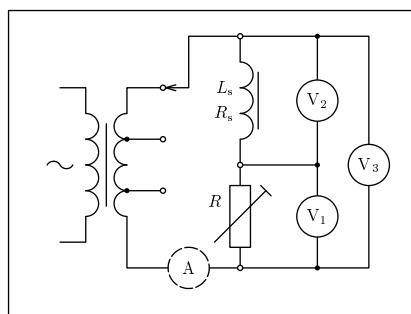
Současně platí  $I = \frac{U_1}{R}$ .



Obr. L-1



Obr. L-2



Obr. L-3

Absolutní hodnota impedance cívky je

$$Z = \frac{U_2}{I} = \frac{U_2}{U_1} R.$$

Rezistance a indukčnost cívky jsou

$$R_s = \frac{U_{R_s}}{I} = \frac{U_2 \cos \varphi}{I} = Z \cos \varphi, \quad L_s = \frac{U_{L_s}}{\omega I} = \frac{U_2 \sin \varphi}{\omega I} = \frac{Z \sin \varphi}{\omega}.$$



### Úkoly

1. Určete indukčnost  $L_s$  ideální cívky a rezistanci  $R_s$  ideálního rezistoru, jejichž sériové spojení by při frekvenci 50 Hz nahradilo cívku rozkladného transformátoru o 1200 závitoch a) s rovným jádrem, b) s uzavřeným jádrem.

2. Rezistanci  $R_s$  porovnejte se stejnosměrným odporem vinutí cívky.

### Provedení úlohy

Sestavíme obvod podle obr. L-3. Jako zdroj použijeme síťový transformátor s odbočkami na sekundárním vinutí nebo síťový transformátor doplněný o potenciometr, abychom získali pět různých napětí od 0 V do 10 V. Jako rezistor  $R$  se nejlépe hodí odporová dekáda; můžeme však použít i válcový reostat, jehož odpor vhodně nastavíme a změříme ohmmetrem (indukčnost odporového vinutí můžeme zanedbat). Odpor, který nastavíme na dekáde nebo na reostatu, by se měl přibližně rovnat absolutní hodnotě impedance cívky. Potom bude napětí  $U_1$  přibližně stejné jako napětí  $U_2$ .

Ampérmetr není nutný. Slouží jen ke kontrole, že nebyla překročena nejvyšší dovolená hodnota proudu pro cívku a reostat. Voltmetry  $V_1$  až  $V_3$  mají mít co největší vnitřní odpor. Vystačíme i s jediným voltmetrem, který přepojujeme do všech tří poloh.

Obě cívky měříme při pěti různých hodnotách celkového napětí  $U_3$ . Naměřené hodnoty zapíšeme do tabulky (pro každou cívku bude jedna tabulka):

| č.                          | $R/\Omega$ | $U_3/V$ | $U_1/V$ | $U_2/V$ | $\cos \varphi$ | $Z/\Omega$ | $R_s/\Omega$ | $L/H$ |
|-----------------------------|------------|---------|---------|---------|----------------|------------|--------------|-------|
| 1                           |            |         |         |         |                |            |              |       |
| 2                           |            |         |         |         |                |            |              |       |
| 3                           |            |         |         |         |                |            |              |       |
| 4                           |            |         |         |         |                |            |              |       |
| 5                           |            |         |         |         |                |            |              |       |
| Průměr                      |            |         |         |         |                |            |              |       |
| Krajní odchylka ar. průměru |            |         |         |         |                |            |              |       |

Odchylky jednotlivých výsledků od aritmetického průměru jsou vedle nepřesnosti měření způsobeny i určitou závislostí magnetických vlastností jádra na intenzitě magnetického pole, tedy na proudu, který prochází cívku. Posuďte, která z obou příčin je významnější.

Stejnosemřný odpor cívky změříme ohmmetrem nebo stejnosměrným voltmetrem a ampérmetrem v obvodu stejnosměrného proudu.

## 10.2 Frekvenční charakteristiky indukčnosti a rezistance cívky

### Teorie

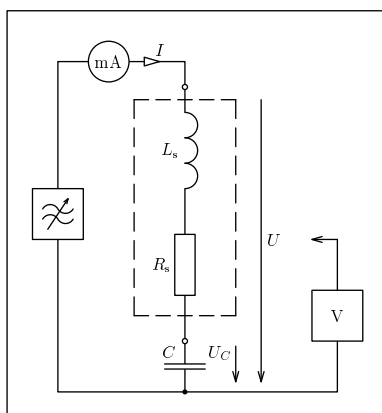
Reálná cívka má v nízkofrekvenčním obvodu s harmonickým střídavým proudem stejné vlastnosti jako sériové spojení ideální cívky o indukčnosti  $L_s$  a ideálního rezistoru o rezistanci  $R_s$ . Reálný kondenzátor se v nízkofrekvenčním obvodu chová téměř jako ideální kondenzátor o kapacitě  $C$ . Spojíme-li cívku s kondenzátorem do série, dostaneme sériový rezonanční jednobran, jehož připojením k tónovému generátoru vznikne rezonanční obvod (obr. L-4).

Při rezonanční frekvenci  $f_r$  prochází obvodem největší proud  $I_r$  a na rezonančním jednobranu naměříme nejmenší napětí  $U_r$ . (Vzniká velký úbytek napětí na vnitřním odporu generátoru.) Na kondenzátoru naměříme při rezonanci napětí  $U_{Cr} > U_r$ . Přitom platí vztahy odvozené v kap. 7:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C}}, \quad L_s = \frac{1}{4\pi^2 f_r^2 C}, \quad Z_r = \frac{U_r}{I_r} = R_s,$$

$$\frac{U_{Cr}}{U_r} = \frac{\omega_r L_s}{R_s} = Q.$$

Rezananční frekvenci obvodu můžeme měnit zapojováním kondenzátorů s různou kapacitou.



Obr. L-4

### Úkoly

1. Veličiny  $L_s$ ,  $R_s$ , které charakterizují cívku, nejsou konstantní, ale závisí na frekvenci. Určete tuto závislost u cívky 1200 závitů z rozkladného transformátoru s rovným jádrem.

2. Ověřte, že při rezonanci platí

$$\frac{U_{Cr}}{U_r} = \frac{\omega_r L_s}{R_s}.$$

### Provedení úlohy

Sestavte obvod podle obr. L-4 s kondenzátorem známé kapacity. Jako miliampérmetr můžeme použít např. přístroj DU 10, napětí měříme nízkofrekvenčním milivoltmetrem, např. BM 310 nebo NV 389. Napětí generátoru udržujte na maximu.

Na tónovém generátoru nastavte rezonanční frekvenci, při které celkové napětí rezonančního jednobranu dosáhne výrazného minima  $U_r$ . Změřte rezonanční proud  $I_r$  a napětí na kondenzátoru  $U_{Cr}$ .

Měření opakujte pro různé kapacity kondenzátoru v rozsahu 10 nF až 10  $\mu$ F. Pro jednotlivé rezonanční frekvence vypočítejte  $L_s$ ,  $R_s$ ,  $Q_1 = \frac{\omega_r L_s}{R_s}$  a  $Q_2 = \frac{U_{Cr}}{U_r}$ . Naměřené a vypočítané hodnoty запиšte do tabulky:

|                   |  |  |  |  |
|-------------------|--|--|--|--|
| $C/\text{nF}$     |  |  |  |  |
| $f_r/\text{kHz}$  |  |  |  |  |
| $U_r/\text{V}$    |  |  |  |  |
| $I_r/\text{mA}$   |  |  |  |  |
| $U_{Cr}/\text{V}$ |  |  |  |  |
| $L_s/\text{H}$    |  |  |  |  |
| $R_s/\Omega$      |  |  |  |  |
| $Q_1$             |  |  |  |  |
| $Q_2$             |  |  |  |  |

Ověřte, že  $Q_1 = Q_2 = Q$ , a nakreslete grafy závislosti veličin  $L_s$ ,  $R_s$  a  $Q$  na frekvenci. Je vhodné volit na vodorovné ose logaritmickou stupnici. Průběhy grafů popište.

## 10.3 Určení frekvenčních charakteristik sériového jednobranu CR a nezatíženého dvojbranu CR

### Teorie

Sériové spojení kondenzátoru a rezistoru na obr. L-5a můžeme považovat za sériový jednobran  $RC$ , kterým je zatížen tónový generátor, nebo za dvojbran  $RC$ , kterým napětí tónového generátoru upravujeme.

V prvním případě použijeme fázorový diagram na obr. L-5b. Platí:

$$I = \frac{U_R}{R}, \quad Z = \frac{U_{CR}}{I} = \frac{U_{CR}}{U_R} R, \quad z = \frac{Z}{R} = \frac{U_{CR}}{U_R}, \quad \varphi = -\arccos \frac{U_R}{U_{CR}}.$$

$\varphi$  je fázové posunutí napětí  $U_{CR}$  vzhledem k proudu  $I$ .

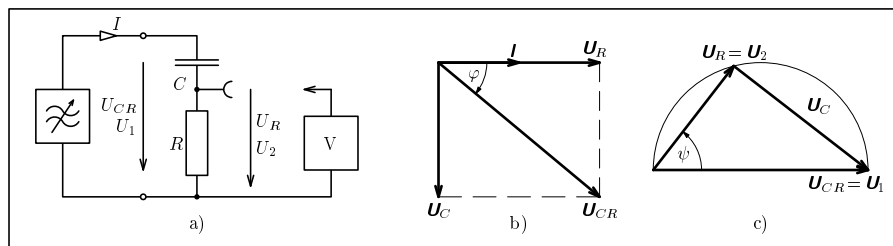
V druhém případě použijeme fázorový diagram podle obr. L-5c. Platí:

$$A = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_R}{U_{CR}}, \quad \psi = \arccos \frac{U_R}{U_{CR}}.$$

$\psi$  je fázové posunutí výstupního napětí  $U_R$  vzhledem k vstupnímu napětí  $U_{CR}$ .

V obou případech přísluší obvodu stejná mezní frekvence

$$f_m = \frac{1}{2\pi RC}.$$



Obr. L-5

### Úkoly

- Podle obr. L-5a připojte k tónovému generátoru sériově rezistor o jmenovité hodnotě odporu 1 k $\Omega$  a kondenzátor o jmenovité hodnotě kapacity 0,1  $\mu$ F. Předtím změřte skutečnou hodnotu odporu  $R$  a kapacity  $C$  pomocí můstku  $RLC$  a vypočítejte mezní frekvenci obvodu  $f_m$ .
- Pro různé hodnoty poměrné frekvence  $f/f_m$  v intervalu od 0,1 do 10 proměřte pomocí nízkofrekvenčního milivoltmetru veličiny  $U_{CR}$  a  $U_R$  a zapište do tabulky. Napětí generátoru udržujte na maximu.
- Vypočítejte hodnoty veličin  $Z$ ,  $\varphi$ ,  $A$ ,  $\psi$  a tabulku doplňte. Ze získaných výsledků nakreslete frekvenční charakteristiky sériového jednobranu  $CR$  a nezátíženého dvojbranu  $CR$ .

| $f/f_m$           | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 1 | 2 | 5 | 10 |
|-------------------|-----|-----|-----|---|---|---|----|
| $f/\text{Hz}$     |     |     |     |   |   |   |    |
| $U_{CR}/\text{V}$ |     |     |     |   |   |   |    |
| $U_R/\text{V}$    |     |     |     |   |   |   |    |
| $Z/\Omega$        |     |     |     |   |   |   |    |
| $\varphi$         |     |     |     |   |   |   |    |
| $A$               |     |     |     |   |   |   |    |
| $\psi$            |     |     |     |   |   |   |    |

## 10.4 Určení frekvenčních charakteristik Wienova členu

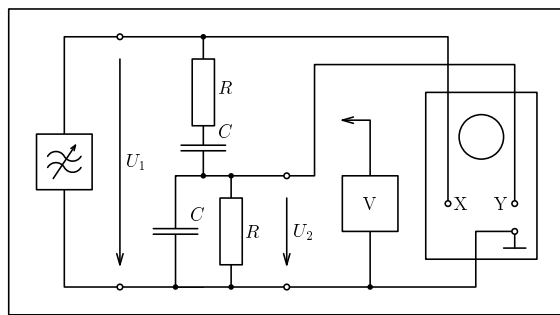
Teorie Wienova členu byla vyložena v řešení příkladu 11 (str. 36).

### Úkoly

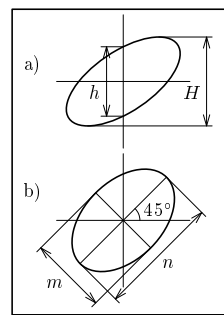
1. Sestavte Wienův člen ze dvou stejných rezistorů o odporu  $R$  (např. 1 k $\Omega$ ) a dvou stejných kondenzátorů o kapacitě  $C$  (např. 100 nF). Určete jeho kritickou frekvenci  $f_0$  a ověřte, že platí

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}.$$

2. Pro různé hodnoty poměrného rozladění v intervalu  $-5 \leq F \leq 5$  určete absolutní hodnotu napětového přenosu  $A = U_2/U_1$  a fázové posunutí  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Nakreslete útlumovou, fázovou a komplexní frekvenční charakteristiku. Jejich průběhy porovnejte s obr. 9-13, 9-14.



Obr. L-6



Obr. L-7

### Provedení úlohy

Měříme v zapojení podle obr. L-6 při maximálním napětí tónového generátoru. Voltmetrem zjišťujeme efektivní hodnoty vstupního a výstupního napětí  $U_1$ ,  $U_2$ .

Osciloskop použijeme k měření absolutní hodnoty fázového posunutí. Na obrazovce vznikne **Lissajousova křivka** ve tvaru elipsy. Označme největší svislou vzdálenost bodů elipsy  $H$  a vzdálenost průsečíků se svislou osou obrazovky  $h$  (obr. L-7a). Platí

$$\sin |\varphi| = \frac{h}{H}.$$

Pokud je absolutní hodnota fázového posunutí větší než  $45^\circ$ , dává mnohem přesnější výsledky druhý způsob: Regulací horizontální a vertikální citlivosti osciloskopu můžeme elipsu upravit tak, že hlavní osa má sklon  $45^\circ$  (obr. L-7b). Pak platí

$$\operatorname{tg} \left| \frac{\varphi}{2} \right| = \frac{n}{m},$$

kde  $n$  je délka vedlejší osy a  $m$  délka hlavní osy elipsy. Pokuste se uvedené vztahy pro určení fázového posunutí sami odvodit.

Pro  $f < f_0$  je  $\varphi > 0$ , pro  $f > f_0$  je  $\varphi < 0$ . Při kritické frekvenci  $f_0$  přejde elipsa v úsečku.

Nejprve vyhledáme kritickou frekvenci  $f_0$ . Před dalším měřením vypočítáme frekvence, které odpovídají zvoleným hodnotám poměrného rozladění  $F$ . Výsledky měření a výpočtů zapíšeme do tabulky.

|                |   |       |       |       |       |       |       |     |
|----------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $F$            | 0 | 1     | -1    | 2     | -2    | 3     | -3    | ... |
| $f/f_0$        | 1 | 1,618 | 0,618 | 2,414 | 0,414 | 3,303 | 0,303 | ... |
| $f/\text{kHz}$ |   |       |       |       |       |       |       |     |
| $U_1/\text{V}$ |   |       |       |       |       |       |       |     |
| $U_2/\text{V}$ |   |       |       |       |       |       |       |     |
| $m/\text{mm}$  |   |       |       |       |       |       |       |     |
| $n/\text{mm}$  |   |       |       |       |       |       |       |     |
| $A$            |   |       |       |       |       |       |       |     |
| $\varphi$      |   |       |       |       |       |       |       |     |

## Výsledky úloh

1.  $C = 31 \mu\text{F}$ ;  $U_C = 10,2 \text{ V}$ ;  $\varphi = -58^\circ$

2.  $I_C = 3,95 \text{ mA}$ ;  $I_R = 0,63 \text{ mA}$ ;  $U = 0,63 \text{ V}$ ;  $\varphi = -81^\circ$

3.  $C = 32 \mu\text{F}$ ;  $L = 0,80 \text{ mH}$

4.  $Z = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L}$ ;  $Z = \frac{R}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}$ ;  $\varphi = \arctg \frac{R}{\omega L}$

5.  $z = \frac{1}{1 - j\frac{f_m}{f}}$ ;  $f_m = \frac{R}{2\pi L}$ ;  $z = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_m}{f}\right)^2}}$ ;  $\varphi = \arctg \frac{f_m}{f}$

6.  $z = 1 - j\frac{f_m}{f}$ ;  $f_m = \frac{1}{2\pi RC}$ ;  $z = \sqrt{1 + \left(\frac{f_m}{f}\right)^2}$ ;  $\varphi = -\arctg \frac{f_m}{f}$

7.  $36 \text{ mA}$ ;  $7,3 \text{ V}$ ;  $36 \text{ V}$

8.  $1,3 \text{ mA}$ ;  $6,8 \text{ V}$ ;  $6,6 \text{ mA}$

9.  $\omega_r$  se nezmění;  $Z_r = 100 \Omega$ ;  $Q = 10$ ;  $B = 64 \text{ Hz}$

10.  $0,20 \text{ mH}$ ;  $12,7 \text{ k}\Omega$

12.  $A = \frac{\frac{2}{3}}{1 + j\frac{2f}{3f_m}}$ ;  $f_m = \frac{1}{2\pi RC}$ ;  $A = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1 + \frac{4f^2}{9f_m^2}}}$ ;  $\varphi = -\arctg \frac{2f}{3f_m}$ ;

$$a = 20 \log \frac{2}{3} - 10 \log \left[ 1 + \left( \frac{2f}{3f_m} \right)^2 \right]$$

13.

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_m}{f}\right)^2}}; \quad a = -10 \log \left[ 1 + \left(\frac{f_m}{f}\right)^2 \right]; \quad \varphi = \arctg \frac{f_m}{f}$$

15.

$$A = \frac{1}{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2 + j\frac{f}{f_d\sqrt{2}}}; \quad A = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_d}\right)^4 - \frac{3}{2}\left(\frac{f}{f_d}\right)^2}}; \quad \varphi = \arctg \frac{\frac{f}{f_d\sqrt{2}}}{\left(\frac{f}{f_d}\right)^2 - 1}$$

$$f_{max} = f_d \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,867 f_d; \quad A_{max} = 1,51; \quad a_{max} = 3,6 \text{ dB}$$

